Euclides

Vakblad voor de wiskundeleraar

Organ van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

816
357
492

jaargang 69 1993 | 1994 december

● **Euclides** ● ● ● ●

Redactie

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr. J. van Lint, Spiekerbrink 25, 8034 RA Zwolle, tel. 038-53 99 85.
Secretaris Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18; fax 076-65 32 18.
Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 60,00 per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 42,50; contributie zonder Euclides *f* 35,00.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Advertenties

Advertenties zenden aan:
ACQUI' MEDIA, Postbus 2776, 6030 AB Nederweert.
Tel. 04951-2 65 95. Fax. 04951-2 60 95.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs. M. C. van Hoorn, Noordersingel 12, 9901 BP Appingedam. Zij dienen machinaal geschreven te zijn en bij voorkeur te vòldoen aan:
- ruime marge
- regelafstand van 1,5
- maximaal 47 aanslagen per regel
- eenzijdig beschreven papier
- met de tekst bijgeleverd op diskette (3,5 of 5,25 inch) in WP 5.1, of eventueel in ASCII-files

en liefst voorzien te zijn van (genummerde) illustraties
- die gescheiden zijn van de tekst
- aangeleverd in zo origineel mogelijke vorm
- waar nodig voorzien van bijschriften

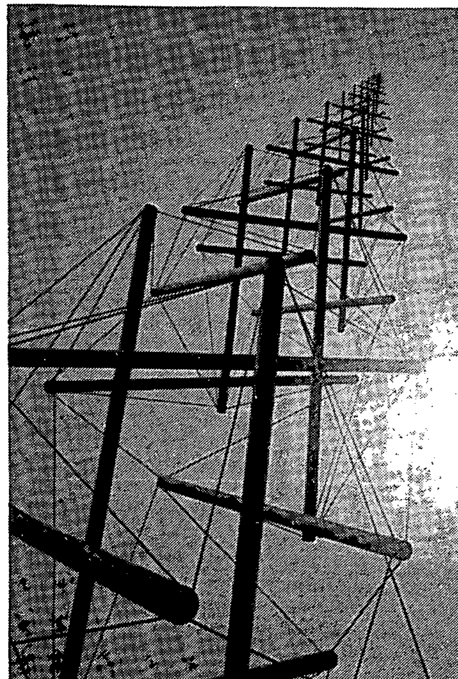
De ruimte die een artikel of mededeling bij plaatsing in beslag neemt kan worden bepaald door uit te gaan van 48 tekstregels per kolom bij een kolomhoogte van 20 cm; aan de hand hiervan kan ook het ruimtebeslag van illustraties worden bepaald.
De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 2 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Abonnementen niet-leden

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 66,00. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 43,00.
Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. Verkoopadministratie, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86.
Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers *f* 11,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

ISSN 01.65-0394

Inhoud

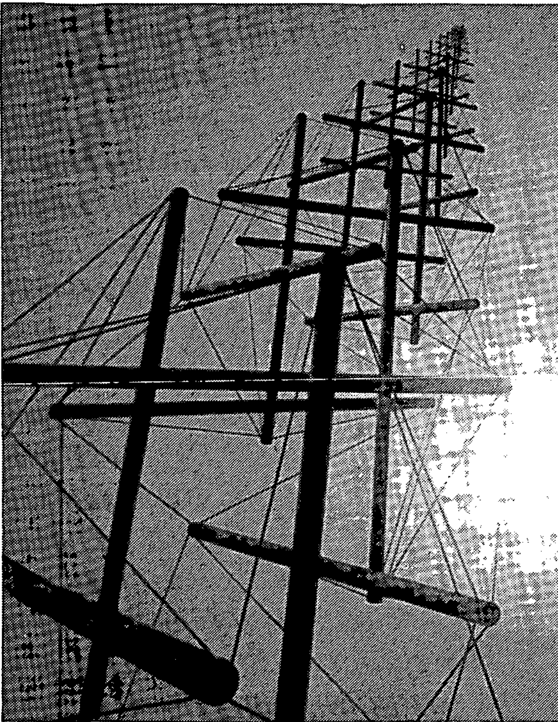


Toren van Snelson

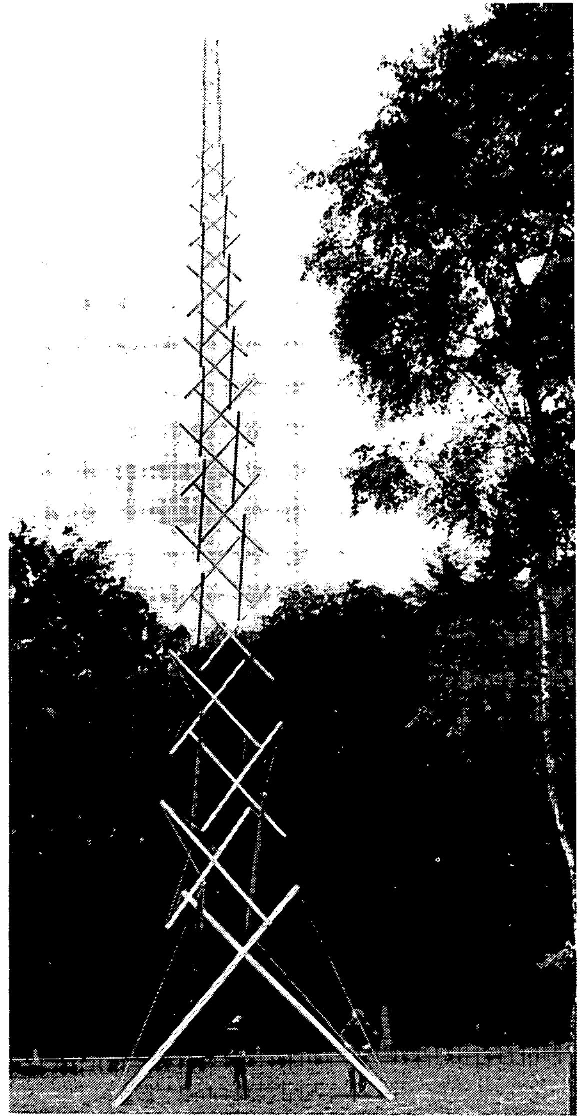
▶ De toren van Snelson – een minimum in de kunst –

Henk Mulder

In het park van het Kröller-Müllermuseum op de Hoge Veluwe staat een opzienbarende toren, een 'onmogelijk' bouwsel, opgetrokken uit staaldraden en aluminium buizen, 5,5 meter breed en 28 meter hoog (figuur 1, 2). De buizen worden op druk belast, de draden op trek.
Het is een kunstwerk van de Amerikaan Kenneth Snelson. Als je aan de voet van de toren staat, overvalt je een gevoel van verbazing dat de zaak



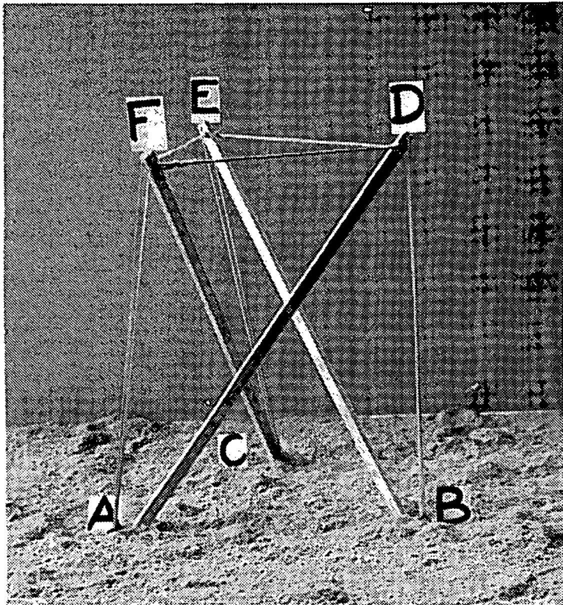
Figuur 1 De toren van Snelson vanaf de grond



Figuur 2 De toren in het Kröller-Müllerpark

overeind blijft, je weet niet of je het kunst of vernuftige techniek moet noemen. Maar dat is geen interessante vraag.
Wat in ieder geval duidelijk is, is dat de zaak zeker met wiskunde te maken heeft. In het park zijn trouwens nog meer wiskundige stunts te bezichtigen: meetkundige structuren die ieder op hun manier verrassen.

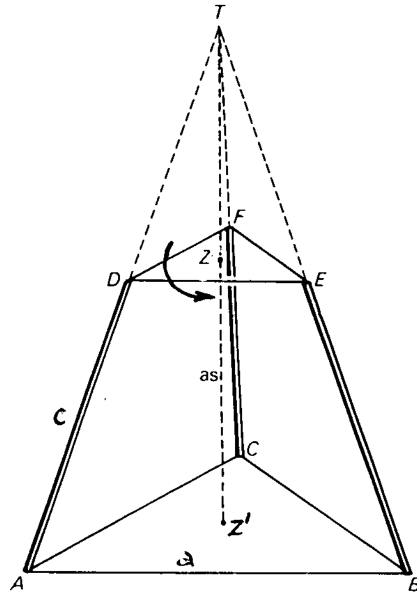
We willen nu proberen inzicht te krijgen in de samenhang. Waardoor is de toren stabiel? Welke regelmaat zit er in? Is er een grondpatroon aan te geven?
Als we op dergelijke vragen kunnen antwoorden, is het ook mogelijk de toren na te bouwen met limonaderietjes en draadjes garen. Na het nodige speurwerk is het ons gelukt de eerste etage overeind te krijgen (figuur 3).



Figuur 3 Realisatie van de eerste etage; AF, BD en CE zijn elastieken

De grondvorm: een afgeknotte piramide

Als we begrijpen hoe de onderste etage geconstrueerd is, is het te verwachten dat we ook begrijpen hoe de rest van de toren tot stand is gekomen, omdat het bouwpatroon steeds is herhaald. We gaan nu de grondetage onderzoeken.
In figuur 4 is een regelmatige driezijdige piramide T.ABC getekend. Hierbij is driehoek ABC gelijkzijdig en ligt de top T recht boven het zwaartepunt (middelpunt) van de gronddriehoek ABC. We gaan piramide T.ABC nu afknotten door middel van een vlak dat evenwijdig met het grondvlak is.



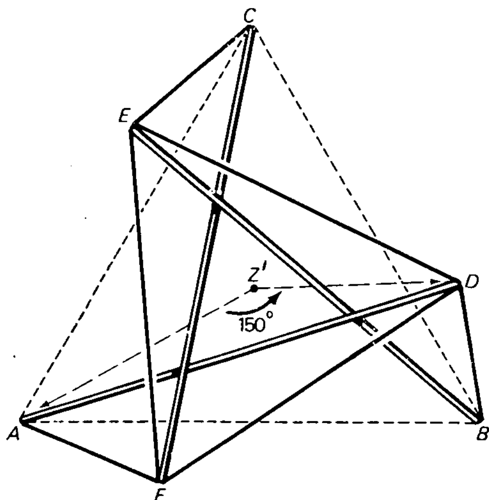
Figuur 4 Grondvorm van de toren: een afgeknotte piramide

Driehoek DEF wordt dan ook gelijkzijdig. De opstaande ribben AD, BE en CF zijn bij de toren van Snelson aluminium buizen. A, B en C zijn vaste punten op de grond. De punten D, E en F zijn door even lange staaldraden met elkaar verbonden. Verder lopen er nog drie langere staaldraden van A naar F, van B naar D en van C naar E.

Draaien naar een stabiele stand

We gaan nu het bovenvlak van de afgeknotte piramide ABC.DEF draaien over een zekere hoek tegen de wijzers van de klok in, om de as ZZ'. Omdat de staande buizen vaste lengten hebben en steeds schuiner komen, zal het bovenvlak tijdens dat draaien enigermate gaan zakken. Het lijkt gemakkelijk in te zien dat daarbij tegelijkertijd de verbindingen AF, BD en CE korter gaan worden.
Wie zich het beter wil voorstellen, zou er goed aan doen de draaiing in werkelijkheid uit te voeren. Neem dan voor DE, EF en FD draden en voor AF, BD en CD elastiekjes. De draden blijven strak. Er is nu iets heel merkwaardigs waar te nemen.
Er blijkt een bepaalde stand te zijn waarbij de elastiekjes het kortst zijn. AF, BD en CE hebben dan

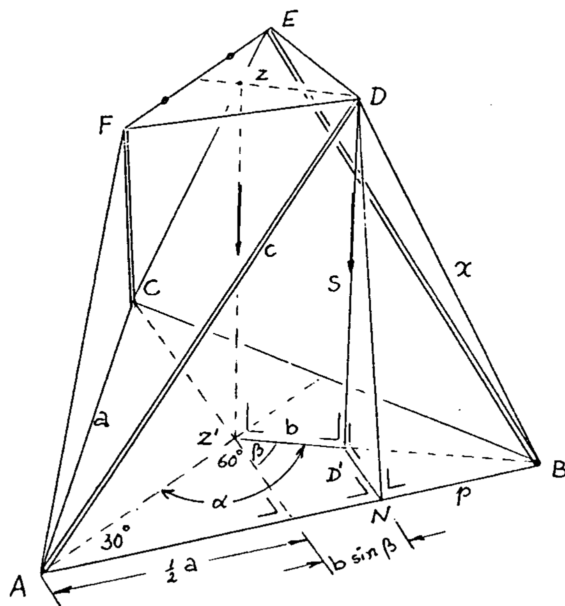
een minimale waarde. De elastiekjes trekken de constructie vanzelf naar die stand. Dat betekent dus, dat AF, BD en CE weer langer zouden moeten worden als we nog even verder zouden doordraaien. We hebben zo op experimentele wijze een stabiele stand gevonden. Het bestaan van zo'n stabiele stand is het geheim van de toren van Snelson. De elastiekjes blijken het kortst te zijn als de bovendriehoek vanuit de oorspronkelijke positie van figuur 4 precies 150° gedraaid is tegen de wijzers van de klok in. In figuur 5 staat van deze situatie een bovenaanzicht getekend. En hier begint voor ons de wiskundige arbeid.



Figuur 5 De bovendriehoek 150° gedraaid.

Het bewijs

Draai de bovendriehoek over een zekere hoek α, tegen de wijzers van de klok in (figuur 6). Het bovenvlak blijft daarbij loodrecht op de as ZZ', en gaat daarbij iets dalen. We projecteren D op het grondvlak. We werken met de constanten $a = AC$, $b = ZD$ en $c = AD$. Stel verder $\alpha - 60° = \beta$ en $NB = p$, waarin dus $p = \frac{1}{2}a - b\sin\beta$. We willen de lengte van x bepalen als functie van de hoek α.



Figuur 6 Het bovenvlak over een hoek α gedraaid.

In driehoek ABD geldt:

$$x^2 - p^2 = DN^2 = c^2 - (a - p)^2, \text{ zodat}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= p^2 + c^2 - a^2 + 2ap - p^2 \\ &= c^2 - a^2 + 2a(\tfrac{1}{2}a - b\sin\beta) = c^2 - 2ab\sin\beta \end{aligned}$$

Dus is $x = \sqrt{(c^2 - 2ab\sin\beta)}$, en zo een functie van β en daarmee ook van α. De lengte x is minimaal als $\sin\beta = 1$. Dit is het geval als $\beta = 90°$, oftewel $\alpha = 150°$. Hieruit volgt dat de kabellengten AF, BD en CE minimaal worden als we de bovendriehoek vanuit de oorspronkelijke stand over 150° draaien tegen de wijzers van de klok in.
De minimale kabellengte wordt gegeven door $x_{min} = \sqrt{(c^2 - 2ab)}$. Om een bestaanbare constructie te krijgen, moet onder andere voldaan worden aan de voorwaarde $c^2 > 2ab$.

In ons model (figuur 3) is hieraan voldaan, aangezien $c = 30$ cm, $a = 18$ cm en $b = 8$ cm. Als c al te klein zou zijn, zou de hele constructie plat op de grond komen te liggen.

Verdere eigenschappen

In de oorspronkelijke stand van figuur 4 hebben de spankabels een maximale lengte. Het gaat hier om een randmaximum met waarde $\sqrt{(c^2 + ab\sqrt{3})}$.
Het absolute maximum van de functie, zijnde $x_{max} = \sqrt{(c^2 + 2ab)}$, wordt in de constructie niet gebruikt. Dit maximum zou ontstaan indien $\alpha = -30°$.
Tenslotte bekijken we hoe de hoogte s varieert als we het bovenvlak draaien over een hoek α.

$$s^2 = AD^2 - AD'^2$$
$$= AD^2 - (AZ'^2 + Z'D'^2 - 2 \cdot AZ' \cdot Z'D' \cdot \cos\alpha)$$
$$= c^2 - \tfrac{1}{3}a^2 - b^2 + \tfrac{2}{3}\sqrt{3} \cdot ab \cdot \cos\alpha$$

De hoogte is dus minimaal als $\alpha = 180°$. Als we weer werken met $c = 30$ cm, $a = 18$ cm en $b = 8$ cm, is $s = 29{,}9$ cm bij $\alpha = 0°$, en $s = 24{,}2$ cm bij $\alpha = 150°$; bij $\alpha = 180°$ ontstaat het absolute minimum $s = 23{,}7$ cm.

Het bouwen van de toren

Men moet zich de verdere opbouw van de toren als volgt denken. We beginnen nog even van voren af aan.
Neem drie even lange buizen, verbind die aan de bovenkant met drie even lange kabels en zet ze in de grond in de gaten die de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek zijn. Zorg er hierbij voor dat de bovendriehoek (DEF) niet veel kleiner is dan de gronddriehoek (ABC). Breng vervolgens de kabels AF, BD en CE aan en span ze zo strak mogelijk. Hierdoor gaat de constructie vanzelf 150° draaien, de bovenkabels (DE, EF en FD) komen ook op spanning en de eerste etage is klaar.
De tweede etage heeft dezelfde vorm als de eerste en wordt gebouwd op de middens van de kabels DE, EF en FD. Door dit zo te doen dreigt de spanning op de bovenkabels te groot te worden, omdat ze al strak gespannen zijn. Men lost dat als volgt op. Men maakt nieuwe extra verbindingen van D naar E, van E naar F en van F naar D, die aanzienlijk langer zijn dan de zojuist genoemde rechte verbindingen. Op deze even lange slappe kabels wordt de volgende etage gebouwd, waarbij de punten van de gronddriehoek de middens van die langere kabels zijn. Als eenmaal de nieuwe etage staat, worden de rechte verbindingen verwijderd.
Zo wordt etage op etage gezet tot de hoogte van 28 meter bereikt is. Het zal wel duidelijk zijn dat door het breken van één verbindingskabel het hele evenwicht verbroken zou worden en de toren zou instorten. Maar de toren staat er al vele jaren.

▶ Henk Mulder en de wereld

Vraag iemand die Henk Mulder heeft gekend naar een anekdote, en er volgen verscheidene anekdotes. Ook in die zin was Henk Mulder inspirerend.
Henk Mulder, die in juli 1993 overleed, was een unieke man, een fenomeen. Weinigen zouden een leven kunnen leiden als hij. Weinigen zouden het durven. In elke anekdote zit bewondering naast verwondering.
Hij was geen wiskundige, qua opleiding Delfts ingenieur. Hij was eerder een technicus dan een experimentator. Maar vooral: hij was origineel, hij was geen nabootser. Hij keek en probeerde te begrijpen. Zijn ontdekkingen deelde hij het liefst met anderen, ongeacht of de ontdekking nieuw was of niet. Graag gaf hij zijn kennis door.
Door de telefoon, en soms ook in een briefje, mopperde hij wel eens op wiskundigen. Vooral het rekenen met dimensieloze grootheden - lengte, oppervlakte en inhoud zonder maateenheden - was hem een doorn in het oog. Hij deelde het enthousiasme van wiskundigen voor cycloïdes of buckyballs.
Hij was ook nieuwsgierig naar de mensen die hij ontmoette. Om die reden kon hij even kort bij je op bezoek komen. Tegelijk spaarde hij zo een postzegel uit, want hij had natuurlijk een nieuw artikel meegenomen.
In Euclides schreef hij in totaal twintig stukken Sommige ervan zijn ook elders verschenen, in iets andere vorm meestal. Maar de meeste stukken waren nieuw. Een hoogtepunt was het artikel 'De krommen van Rijkswaterstaat', verschenen in Euclides 64 (1988-1989), bladzijden 223-229. Zeker

ook de illustraties maakten dit artikel zo waardevol. En de naam clotoïde staat menigeen in het geheugen gegrift.

De foto die we hier publiceren stond eerder in Euclides 66 (1990-1991), bladzijde 104, bij het artikel 'Buiten schot'. De foto is meer dan 25 jaar oud. Henk Mulder werkte toen enige jaren op Aruba, en bezocht van daaruit onder meer Suriname en Ecuador.

Het bericht van zijn ziekte heeft velen ontroerd. Hemzelf ook. Maar hij bleef zoals hij was. Een operatie (februari 1992) mocht van hem, medicatie mocht niet, en zelfs een dieet wilde hij niet. Hij reisde naar Aruba en Venezuela, naar de Mont-Blanc en naar Santiago de Compostela. Naar aanleiding van zijn verblijf te Hattem (december 1992) schreef hij een stukje in Archimedes (mei 1993) over de route van een veerbootje over de IJssel.
Maar nu is hij er niet meer. We hebben nog de vele herinneringen, en we hebben zijn stukken. Het bijgaande artikel lag nog op de plank. Het verscheen jaren geleden in Pythagoras. Voor Euclides werd het bewerkt.

Henk Mulder zullen we in ere houden.

Martinus van Hoorn



▶ De wiskunde-examens vbo/mavo van 1993, eerste tijdvak

Drs. G. Bakker (Cito)
F.J. Mahieu (NVvW)

In dit artikel worden het C- en D-examen van 1993 besproken.
Eerst komen de examenbijeenkomsten die de NVvW jaarlijks organiseert aan de orde. Daarna worden de belangrijkste resultaten weergegeven van de door het Cito verzamelde scores.
Vervolgens passeert een aantal afzonderlijke vragen de revue van het D-, respectievelijk het C-examen. Vraagnummers in de tekst verwijzen naar examenvragen die bij dit artikel zijn afgedrukt.

Examenbijeenkomsten

Op 25 en 26 mei j.l. vonden in acht plaatsen de besprekingen plaats van de C- en D-examens 1993. Wie denkt dat deze 'traditionele' examens de aandacht wat gaan verliezen heeft het mis. Uit de reacties tijdens de bijeenkomsten bleek dat de samenstellers van de examens zich uitstekend van hun taak hebben gekweten. Overal was men met beide examens tevreden.
Zoals gebruikelijk gaven de deelnemers in het bijzonder hun mening over de open vragen en de normering hiervan. De moeilijkheidsgraad: goed. De tijd: de leerlingen hadden de twee uren wel nodig, maar er was geen tijdgebrek. Het evenwicht tussen traditionele en originelevragen: goed. De normering: goed, behoudens enkele kleine problemen, waarbij het meestal ging om een punt meer of minder.
De NVvW heeft aan de Cevo verslag van de bijeenkomsten gedaan en een deel van de opmerkingen is verwerkt in de nu volgende analyse van het werk.

Scoreresultaten

Vanaf 1990 is de opzet van het examen gelijk gebleven: 22 meerkeuzevragen (44 punten) en circa 10 open vragen (46 punten) en het gebruik van een bijlage.
In tabel 1 zijn de belangrijkste gegevens vermeld. Zowel het C- als D-examen werd heel goed gemaakt.

tabel 1

	mavo/ vbo-D	mavo/ vbo-C
aantal kandidaten in steekproef	2271	2595
gemid. p-waarde meerkeuzevragen	65,9	58,1
gemid. p'-waarde open vragen	49,8	46,4
gemid. p'-waarde totaal	57,7	52,1
gemid. score meerkeuzevragen	29,0	25,6
gemid. score open vragen	22,9	21,3
gemid. score totaal (+ 10)	61,9	56,9
gemid. score meisjes	60,0	53,3
gemid. score jongens	63,4	59,6
door Cevo vastgestelde cesuur	54/55	54/55
gemiddeld cijfer	6,2	5,7
percentage onvoldoendes	30	43
betrouwbaarheid meerkeuzevragen	0,59	0,69
betrouwbaarheid open vragen	0,64	0,71
betrouwbaarheid totaal	0,73	0,80

Voor de examens vbo en mavo werden in totaal bijna 98000 kandidaten ingeschreven, van wie tweederde een wiskunde-examen ging doen.
Voor D haalden de kandidaten gemiddeld 57,7% van de punten (in 1991 46,8% en in 1992 50,7%). Voor de vragen die specifiek waren voor het D-programma, dat wil zeggen vragen die qua leerstof en/of niveau het C-programma min of meer te bui-



ten gingen, konden totaal 37 punten behaald worden. De kandidaten behaalden daarvan gemiddeld 55%. Deze specifieke vragen bleken dit jaar zeer goed toegankelijk te zijn; vanaf 1990 waren deze percentages slechts 37%, 32% en 41%.
Voor C haalden kandidaten gemiddeld 52,1% van de 90 punten (in 1991 48,5% en in 1992 47,0%).
De vaksectie wiskunde C/D van de Cevo stelde beide cesuren vast op 54/55, waarbij 30% van de D-kandidaten en 43% van de C-kandidaten een onvoldoende cijfer kreeg. Het jaar 1990 met de te gemakkelijke examens buiten beschouwing gelaten, zijn dit percentages die voor wiskunde C en D beduidend lager zijn dan in voorgaande jaren.
De totaalscore van de meisjes was bij D gemiddeld 3,4 scorepunten lager dan die van de jongens en bij C 6,3 scorepunten lager. Zowel bij de gesloten als bij de open vragen scoorden de meisjes gemiddeld lager. Bij D hadden de meisjes bij 12 van de 30 vragen een score die gelijk aan of hoger dan die van de jongens was. Bij C was dat bij 9 van de 32 vragen. Uitgedrukt in percentages voldoendes: meisjes D 64%, jongens D 74%, meisjes C 48% en jongens C 63%.

Vbo/mavo-D

In tabel 2 zijn de gegevens per vraag vermeld. Vijf meerkeuzevragen waren erg gemakkelijk ($p > 80$) en één meerkeuzevraag was erg moeilijk ($p < 40$).

Vraag 3 is een voorbeeld van een vraag met erg mooie resultaten. Het op nul herleiden gaf nauwelijks problemen. Van de meisjes maakte 86% deze vraag goed en van de jongens 81%.
Vraag 4 werd slecht gemaakt. Velen vonden kennelijk dat $x^2 < 9$ gelijkwaardig is met $x < 3$. Hoe zou deze vraag als open vraag gemaakt zijn?
Vraag 10 werd door slechts 38% goed gemaakt. Hier werd getoetst of de kandidaat wist dat de raaklijn in P loodrecht op de straal MP staat en of hij de definitie van richtingscoëfficiënt kende. 27% koos $-\frac{6}{5}$ in plaats van $-\frac{5}{6}$. Hoe kwam het dat 24% -1 koos: als straal OP genomen, of alleen maar globaal zo'n beetje geschat?

tabel 2 Toets- en itemanalyse-Cito, Arnhem
Analyse vragen wiskunde-D mavo/vbo-populatie

Vraag	sleutel	p	p- en a-waarden A	B	C	D	E	F
1	D	92	2	1	1	92*	1	1
2	C	68	17	8	68*	7		
3	D	83	8	1	1	83*	3	4
4	E	44	7	2	31	16	44*	
5	C	74	7	8	74*	2	10	
6	B	61	14	61*	1	1	10	13
7	B	64	4	64*	5	6	18	3
8	C	81	7	3	81*	9		
9	B	60	17	60*	10	14		
10	F	38	24	6	2	2	27	38*
11	A	63	63*	14	16	6		
12	B	73	4	73*	10	10	3	
13	D	91	4	1	3	91*	1	
14	C	69	7	6	69*	2	10	6
15	B	63	6	63*	17	14		
16	A	42	42*	11	28	4	16	
17	D	81	2	10	6	81*		
18	B	77	3	77*	4	5	5	7
19	A	48	48*	14	9	11	7	11
20	C	66	2	2	66*	20	9	1
21	E	55	17	4	5	10	55*	9
22	E	57	4	5	3	17	57*	14

	max. score	gem. score	p'	relatieve frequenties (in %) 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
23	9	5,77	64	8	4	8	9	10	3	5	8	13	32
24	4	2,81	70	19	6	5	14	56					
25	4	1,67	42	48	6	10	5	31					
26	3	1,55	52	29	19	18	33						
27	4	2,63	66	25	4	6	13	52					
28	8	1,87	23	44	25	5	6	3	2	2	5	8	
29	7	4,33	62	10	4	12	6	21	7	6	32		
30	7	2,28	33	53	4	9	4	3	5	3	20		

Aantal kandidaten: 2271
Gemiddelde score: 61,9
Standaarddeviatie: 14,1
Gemiddeld percentage goed: 57,7

Vraag 12 werd heel goed gemaakt. Hier was overigens het verschil tussen meisjes ($p = 65$) en jongens ($p = 78$) het grootst.
Vraag 16 ging over eventuele symmetrie-assen in een parallellogram: 58% vond dat die er waren. Werd de vierhoek gezien als een ruit? Controleren leerlingen wel in voldoende mate of een lijn een symmetrie-as is, bijvoorbeeld door te vouwen?
Vraag 20 was weliswaar redelijk goed gemaakt door 66%, maar hoe kon het dat zelfs 29% in de vierde dimensie werkte met de stelling van Pythagoras, zoals $\sqrt{2^2 + 6^2 + 5^2 + 2^2} \approx 8,3$?

Zouden kandidaten met enig ruimtelijk inzicht ingezien hebben dat $KL = AH$ of $KL = BG$?
In een statistiekvraag bleek dat leerlingen het begrip modus goed kenden; het begrip mediaan bij een even aantal waarnemingen gaf echter moeilijkheden.

Bij de open vragen waren er twee moeilijk: vraag 28 met p′ = 23 en vraag 30 met p′ = 33.
Vraag 26 vroeg de vergelijking van een al getekende cirkel. Dit was zo duidelijk een standaardvraag dat je een p-waarde van 90 zou mogen verwachten. Helaas was deze slechts 52. Ook al in 1991 bleek dat slecht te gaan. Kandidaten geven bij zo'n vraag in het algemeen een groot scala aan antwoorden.
Gezien alle antwoorden waarbij voor het linkerlid van de vergelijking nog één van de twee punten gegeven werd, kun je je afvragen of het niet beter geweest zou zijn om bij elke fout in het linkerlid 0 punten toe te kennen. Het gaat hier namelijk slechts zelden om verschrijvingen. Het ontbrak de kandidaten blijkbaar aan elementaire kennis. Ook werd niet de moeite genomen het antwoord te verifiëren.
Vraag 28. Veel leerlingen hebben waarschijnlijk onvoldoende beseft dat ze de in vraag 27 gegeven hoekgrootte moesten gebruiken bij de beantwoording. Dit expliciet in de vraag vermelden was ook niet gewenst, omdat je dan de clou weggaf.
Er waren diverse kandidaten die de oppervlakte gingen schatten. Bijvoorbeeld door de oppervlakte van de halve cirkel te nemen, min de oppervlakte van een rechthoek. Dit geeft $\frac{1}{2} \cdot 17\pi - 8 \approx 18{,}7$ of $\frac{1}{2} \cdot 17\pi - 8{,}1 \approx 18{,}6$, beide vrij goede benaderingen.
In de nieuwe wiskunde zullen benaderingsmethoden van oppervlakte, omtrek, inhoud en dergelijke zeker een belangrijke plaats gaan innemen. In deze vraag 28 ging het bij het huidige examenprogramma echter niet om schatten, maar om berekenen.
De context-opgave over het zwembad oogstte veel waardering. Vraag 29 over de inhoud werd redelijk gemaakt, met p′ = 62.
De oplossingen van de kandidaten waren wel vaak anders dan die uit het correctievoorschrift. Een aantal kandidaten kwam op het idee met de gemiddelde diepte te rekenen!
Vraag 30 vroeg inventiviteit en creativiteit van de kandidaten. Ze konden hier echter vaak moeilijk verwoorden wat ze bedoelden. Van een regionale bespreking kwam het commentaar: 'Opgave 4 werd door de kandidaten als moeilijk en gedeeltelijk buiten de stof ervaren. Velen hadden de opgave niet af, maar er waren soms heel creatieve oplossingen.'

Vbo/mavo-C

In tabel 3 staan de gegevens over de afzonderlijke vragen. Er was één erg gemakkelijke meerkeuzevraag; drie meerkeuzevragen waren erg moeilijk.

tabel 3 Toets- en itemanalyse-Cito, Arnhem
Analyse vragen wiskunde-C mavo/vbo-populatie

Vraag	sleutel	p	p- en a-waarden A	B	C	D	E	F
1	C	69	9	8	69*	14		
2	A	71	71*	10	8	11		
3	D	61	6	15	18	61*		
4	C	42	21	21	42*	16		
5	C	60	23	8	60*	8		
6	E	62	9	5	7	15	62*	2
7	A	61	61*	10	23	6		
8	B	39	16	39*	17	29		
9	B	48	25	48*	27			
10	A	43	43*	13	4	2	38	
11	A	18	18*	4	1	1	75	
12	B	77	6	77*	8	9		
13	D	60	6	12	2	60*	3	18
14	C	76	8	11	76*	2	3	
15	E	38	5	43	6	5	38*	3
16	C	76	5	6	76*	7	3	3
17	B	81	14	81*	2	1	1	
18	B	42	12	42*	28	18		
19	F	91	2	0	4	1	2	91*
20	B	41	10	41*	6	6	25	12
21	D	60	12	6	8	60*	9	4
22	C	62	20	13	62*	4	2	

Vraag	max. score	gem. score	p′	relatieve frequenties (in %) 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
23	5	3,23	65	24	2	4	9	16	44				
24	4	1,66	42	50	6	5	6	33					
25	5	1,37	27	58	9	6	6	8	13				
26	4	2,61	65	25	4	5	17	48					
27	2	1,58	79	19	4	77							
28	6	2,99	50	29	8	6	10	12	9	25			
29	2	0,86	43	53	7	39							
30	6	1,98	33	47	13	6	4	8	4	19			
31	5	2,47	49	43	3	4	5	4	41				
32	7	2,58	37	44	3	9	6	12	5	3	19		

Aantal kandidaten: 2595
Gemiddelde score: 50,9
Standaarddeviatie: 16,2
Gemiddeld percentage goed: 52,1

Vraag 4 was een gemeenschappelijke vraag over een eerstegraads ongelijkheid die grafisch opgelost moest worden. Bij D was de p-waarde 68 en bij C slechts 42. Hoe eenvoudig de adviescommissie zo'n vraag ook formuleert, het blijft moeilijk voor de kandidaten. Het functie-begrip liet weer veel te wensen over.
In vraag 5 was te zien dat slechts 60% de richtingscoëfficiënt goed kon aflezen. Ongeveer een kwart deelde de horizontale verandering door de verticale verandering. De benodigde kennis was onvoldoende aanwezig.
Vraag 8 was ook gemeenschappelijk. Bij D was de p-waarde 60 en bij C maar 39. Zowel bij p als bij l werd vaak de verkeerde kant gekozen. Dat beide door O gaan, maakte het wat moeilijker omdat de kandidaten nu niet (0, 0) konden invullen, maar bijvoorbeeld (1, 0) of (0, 1) moesten nemen.
Zou $y \geqq x^2$, net als bij de cirkel, als 'buiten de parabool' geïnterpreteerd worden? Of misschien als 'rechts van'? Deze vaardigheid werd onvoldoende beheerst.
Vraag 10 wekte verbazing over de lage p-waarde van 43. Na het tekenen van de lijn $y = 2x + 1$ zagen een aantal leerlingen mogelijk dat het kan met de translatie $\binom{1}{0}$, terwijl ze zich onvoldoende realiseerden dat er heel veel translaties mogelijk zijn. Toch bleek uit de toets- en itemanalyse dat de vraag heel goed onderscheidde tussen goede en minder goede kandidaten.
Vraag 11 was een voorbeeld van een gering kritisch vermogen van de kandidaten. Je kon toch zien dat er zeker meer dan drie kleine ruitjes in de grote ruit passen?
Vraag 13 was de meerkeuzevraag die het beste onderscheid maakte tussen goed en slecht scorende kandidaten. Omdat deze contextvraag op zich al genoeg vroeg, waren geen afrondfouten in de alternatieven verwerkt. Van de meisjes beantwoordde 47% de vraag goed, van de jongens 70%.
Een vraag over de afstand die je gefietst hebt als het wiel (diameter 75 cm) honderd keer rond is gegaan werd door 43% beantwoord met 75 m.
Dat diameter een ander woord is voor middellijn, mag zeker als bekend verondersteld worden. Hier was het verschil tussen meisjes (p = 24) en jongens (p = 49) het grootst.
Vraag 17 over ruimtelijk inzicht werd heel goed gemaakt.
Vraag 18 liet dit jaar opnieuw zien dat veel kandidaten van de vier bijzondere lijnen in een driehoek de naam niet kenden.
Twee statistiekvragen waarin procenten voorkwamen gaven de indruk dat het van belang is wat extra aandacht aan het rekenen met percentages te besteden.

Van de tien open vragen werden er drie moeilijk gevonden, bijvoorbeeld vraag 25.
Vraag 23 naar de omtrek van de vlieger verliep redelijk. Wel kun je je afvragen hoe het kwam dat 24% hier geen enkel punt behaalde.
In vraag 24 scoorde 50% geen enkel punt, ondanks het haast overbodige gegeven dat $\angle M = 90°$. $\angle K = 28°$ was opgenomen in het gegeven omdat goniometrie beperkt is tot het schoolonderzoek. Het kwam voor dat men de helft nam van $180° - 90° - 28°$, dus $\angle N = 31°$ vond, terwijl dat antwoord niet te rijmen is met de figuur.
In vraag 25 behaalde 58% geen enkel punt en kreeg slechts 13% de maximumscore.
Het bijzondere is hier dat een rechthoek om deze vlieger geen vier driehoekjes overlaat, maar ook nog een rechthoekje van 2 bij 1.
Met het halve produkt van de diagonalen werd weinig gewerkt.
In vraag 26 werd de rotatie redelijk goed uitgevoerd.
In de opgave over functies (hier niet opgenomen) werd vóór het tekenen van de grafiek, expliciet gevraagd naar de nodige berekeningen vooraf. De adviescommissies en de vaksectie van de Cevo hebben hiermee goede ervaringen.
De laatste opgave van C was in feite vraag 29 van D, maar dan met de inleidende vraag. Jammer is, achteraf, de maat van 1 m in de tekening, waardoor vaak niet verder werd gewerkt dan $16 \times 50 = 800$, al of niet met eenheden. Als er 0,7 m (of 70 cm) in plaats van 1 m had gestaan, had je eerder een volledige uitwerking gehad als $16 \text{ m} \times 50 \text{ m} \times 0{,}7 \text{ m} = 560 \text{ m}^3$. Dat komt ook de beoordelaarsovereenstemming ten goede.

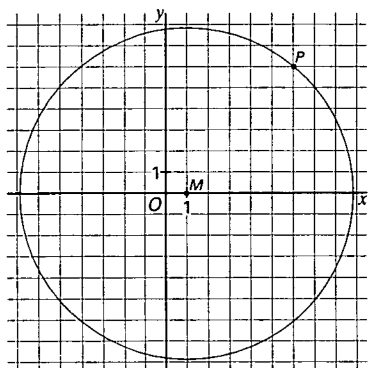
Examenvragen

2p **D3** ■ Los op: $x^2 - 9x + 19 = 1$.
Het antwoord is

A $x = -6 \vee x = -3$
B $x = -5 \vee x = -4$
C $x = 0 \vee x = 2$
D $x = 3 \vee x = 6$
E $x = 4 \vee x = 5$
F er zijn geen oplossingen

2p **D4** ■ Los op: $x^2 - 9 < 0$.
De oplossingsverzameling is

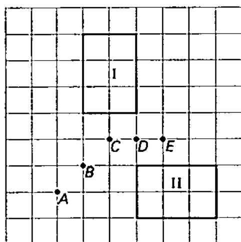
A $\varnothing$
B $\mathbb{R}$
C $\langle \leftarrow, 3 \rangle$
D $\langle \leftarrow, -3 \rangle \cup \langle 3, \rightarrow \rangle$
E $\langle -3, 3 \rangle$



Hiernaast is een cirkel getekend.
De cirkel gaat door $P(6, 6)$.
Het middelpunt is $M(1, 0)$.

2p **D10** ■ Hoe groot is de richtingscoëfficiënt van de lijn door P die de cirkel raakt?

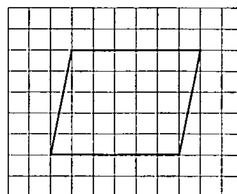
A -1
B $-\frac{4}{5}$
C $-\frac{7}{6}$
D $-\frac{6}{7}$
E $-\frac{6}{5}$
F $-\frac{5}{6}$



Bij een draaiing wordt vierhoek I afgebeeld op vierhoek II.

2p **D12** ■ Welk van de getekende punten kan het centrum zijn?

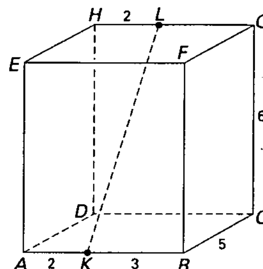
A punt A
B punt B
C punt C
D punt D
E punt E



Hierboven is in een rooster een vierhoek getekend.

2p **D16** ■ Heeft deze vierhoek symmetrie-assen? Zo ja, hoeveel?

A nee
B ja, één symmetrie-as
C ja, twee symmetrie-assen
D ja, drie symmetrie-assen
E ja, vier symmetrie-assen

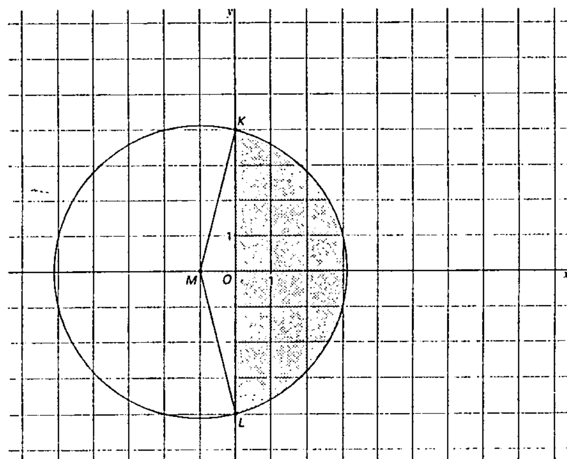


Hierboven is de balk $ABCD.EFGH$ getekend met $AB = 5$, $BC = 5$ en $CG = 6$.
Het punt K ligt op de ribbe AB zo dat $AK = 2$.
Het punt L ligt op de ribbe HG zo dat $HL = 2$.

2p **D20** ■ Bereken KL.
Het antwoord ligt tussen

A $6\frac{1}{2}$ en 7
B 7 en $7\frac{1}{2}$
C $7\frac{1}{2}$ en 8
D 8 en $8\frac{1}{2}$
E $8\frac{1}{2}$ en 9
F 9 en $9\frac{1}{2}$

Bijlage bij de vragen 26, 27 en 28



Opgave 3 (D-niveau)

Op de bijlage is in een assenstelsel Oxy een cirkel c getekend met middelpunt $M(-1, 0)$. Deze cirkel gaat door de punten $K(0,4)$ en $L(0,-4)$.

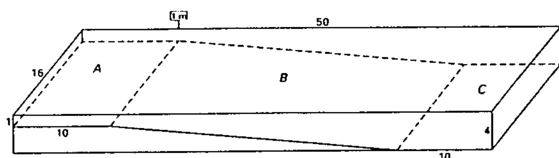
3p **26** □ Schrijf een vergelijking op van c.

4p **27** □ Toon door berekening aan dat $\angle KML \approx 152°$.

8p **28** □ Bereken in één decimaal nauwkeurig de oppervlakte van het grijze vlakdeel.

Opgave 4 (D-niveau)

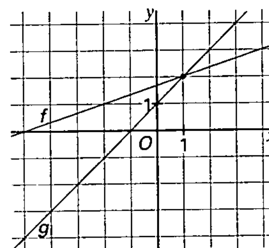
Een zwembad van 16 bij 50 meter heeft een ondiep deel A (diepte 1 meter) en een diep deel C (diepte 4 meter).
Daartussen neemt de diepte regelmatig toe van 1 meter tot 4 meter. Zie de figuur. Alle maten zijn aangegeven in meters.
Het zwembad is tot de rand gevuld.



7p **29** □ Bereken hoeveel m^3 water er in het zwembad zit.

Op de grens van deel A en deel B staat een bordje dat de diepte daar aangeeft (zie de figuur). De badmeester wil aan die kant ook een bordje plaatsen met de tekst 'diepte 1,80 meter'.

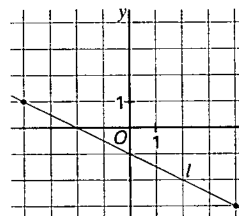
7p **30** □ Bereken hoe groot de afstand tussen de beide bordjes dan moet zijn.



Hierboven zijn de grafieken getekend van de eerstegraads functies f en g.

2p **C4** ■ Lees uit de figuur af voor welke x geldt $f(x) < g(x)$.
= **D2**
Het antwoord is

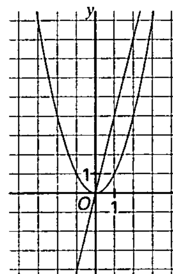
A $x < 1$
B $x < 2$
C $x > 1$
D $x > 2$



Hierboven is de lijn l getekend.

2p **C5** ■ Wat is de richtingscoëfficiënt van l?

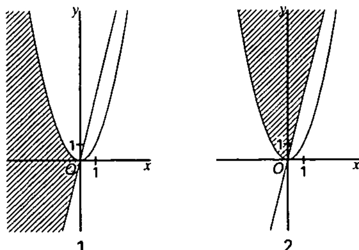
A -2
B -1
C $-\frac{1}{2}$
D $\frac{1}{2}$

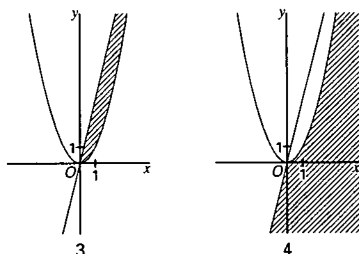


Hiervoor zijn de parabool $y = x^2$ en de lijn $y = 4x$ getekend.

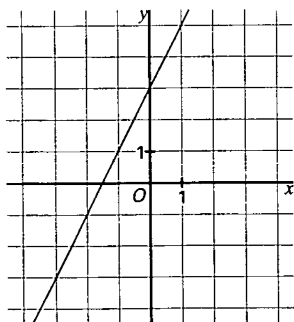
2p **C8** ■ **= D9** Arceer het vlakdeel V van alle punten (x, y) waarvoor geldt $y \geqq x^2 \wedge y \geqq 4x$.

In welke figuur is V gearceerd?





A in figuur 1
B in figuur 2
C in figuur 3
D in figuur 4



Hierboven is een lijn getekend.
Bij een translatie wordt deze lijn afgebeeld op de lijn $y = 2x + 1$.

2p **C10** ■ Welke translatie kan dit zijn?

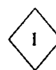
A $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

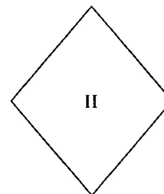
B $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$

E geen van deze

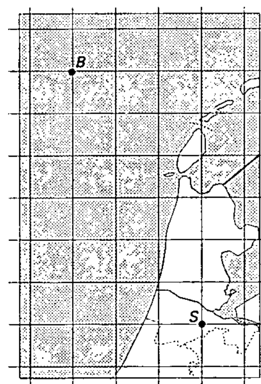




Hierboven zijn de ruiten I en II getekend.
De zijden verhouden zich als 1 en 3.
Bij een vermenigvuldiging met centrum C is II het beeld van I.
De oppervlakte van de grote ruit is 162.

2p **C11** ■ Wat is de oppervlakte van de kleine ruit?

A 18
B 27
C 36
D 45
E 54

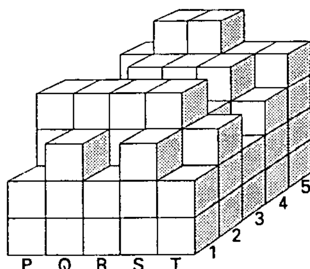


Een helikopter vliegt van Schiphol (S) naar een boortoren (B) in de Noordzee.
Zie de figuur hierboven.
Elk hokje is in werkelijkheid 25 bij 25 km.

2p **C13** ■ Bereken de afstand die de helikopter moet vliegen.
Het antwoord is, afgerond in kilometers

A 135 km
B 150 km
C 160 km
D 168 km
E 181 km
F 225 km

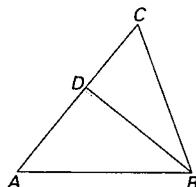
Freek heeft een bouwsel gemaakt van even grote kubussen. Zie de figuur.



Op vakje P1 staan 2 kubussen.

2p **C17** ■ Hoeveel kubussen staan er op vakje Q4?

A drie
B vier
C vijf
D zes
E zeven



Hierboven is in $\triangle ABC$ de lijn BD getekend.

2p **C18** ■ Wat is dat voor een lijn?

A een deellijn
B een hoogtelijn
C een middelloodlijn
D een zwaartelijn

Opgave 1 (C-niveau)

In het assenstelsel in de figuur rechts bovenaan de bladzijde is de vlieger $KLMN$ getekend. Dezelfde figuur staat ook op de bijlage.

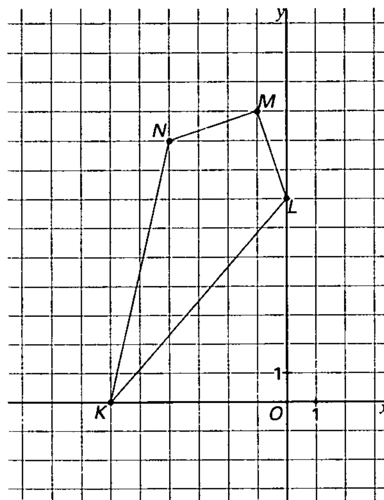
5p **23** □ Bereken in één decimaal nauwkeurig de omtrek van vlieger $KLMN$.

$\angle M = 90°$ en $\angle K = 28°$.

4p **24** □ Bereken $\angle N$.

5p **25** □ Bereken de oppervlakte van vlieger $KLMN$.

4p **26** □ Teken in het assenstelsel op de bijlage het beeld van vlieger $KLMN$ bij rotatie om de oorsprong O over $-90°$.



Bijdrage

Het Sinterklaasgetal

Ronald Rousseau

In de wiskunde zijn heel wat getallen genoemd naar een persoon. Zo kennen we bijvoorbeeld, de constante van Euler (0,57721....), de getallen van Bernoulli en de getallen van Stirling. Een wat minder beroemd getal dat we echter hierbij meer bekendheid willen geven is het Sinterklaasgetal. Dit getal wordt gekarakteriseerd door de wiskundige gelijkheid:

$$6 - 12 = \sin t + \pi t$$

Voor wie het Sinterklaasgetal niet zelf wil uitrekenen:
$t = -1{,}591618432...$

▶ 'De leraar blijft de centrale figuur'

Klaas Wijnia, 51 jaar, leraar aan de Regionale Scholengemeenschap Ter Apel, geeft dit jaar les aan één brugklas. Hij heeft in Ter Apel ervaring opgedaan met onder meer vbo-brugklassen, maar vooral met bovenbouwklassen vwo/havo.

Wou je dit jaar graag een brugklas?
Bij de invoering van de basisvorming vind ik het nodig om zo snel mogelijk de ervaringen bij de nascholing te toetsen aan de praktijk.

Wat voor klas is het? Hoeveel uren per week heb je ze?
In de klas zitten leerlingen met mavo-advies en hoger. In het eerste leerjaar hebben ze nu 4 wekelijkse lessen wiskunde, in het tweede leerjaar krijgen ze 3.

Welk boek gebruik je, en hoe gaat het?
We hebben een boek gekozen (G&R) dat voor de leerlingen van de laagste stroom structuur biedt. In eerste instantie heb ik wat meer tijd voor de behandeling van de stof genomen. Zeer opvallend is dat er nog altijd een grote bereidheid bij de leerlingen is om te knutselen. En dus, als er bij een proefwerk behoefte aan is, wil ik het daar ook wel toestaan. Of moet je toch weer alleen mentaal laten handelen? Goed kunnen tekenen is belangrijk. Ik merk trouwens dat er raakvlakken zijn met het vak techniek, waar de leerlingen onder andere een werktekening moesten maken.

Heb je stof toegevoegd of weggelaten?
Ik vind het leuk om leerlingen uit te dagen. Snellere leerlingen moet je ook meer bieden. Ik vraag bijvoorbeeld naar het aantal diagonalen in een vijfhoek en een zeshoek, en als ze dat hebben vraag ik naar het aantal diagonalen in een twintighoek. De betere leerlingen zijn sneller, omdat ze eerder een verband zien. Uiteraard mag iedereen ermee aan de gang. Ik heb wat herhalingssommen weggelaten, vooral om de vaart er in te houden.


Klaas Wijnia in de klas

Hoe kijk je aan tegen het nieuwe programma?
Ik vind een nieuw programma prima. Sommige ideeën uit de begintijd van de Mammoet waren helemaal versleten. De praktijk zal uitwijzen wat er nu van het nieuwe programma overblijft. In het nieuwe programma vind ik de manier van brengen opvallend, en de plaats die de meetkunde heeft. Voor mij hoeft de meetkunde ook niet meteen systematisch te worden opgezet.

Zou je weer een brugklas willen hebben?
Met deze brugklas gaat het best. Als ik zou merken dat er veel aan de leerlingen voorbij gaat, krijg ik het gevoel dat ik mijn tijd sta te verdoen. Daarmee niets ten nadele van die leerlingen. Een rolwisseling tussen 6-vwo en 1-vbo, van het ene uur op het andere, is groot. Het probleem is het je telkens weer aanpassen aan de situatie van de minst taalbegaafde leerlingen. Natuurlijk blijft de leraar de centrale figuur, dat wel, maar ik wil een afdeling van de school graag herkenning meegeven. Voor de bovenbouw is dat van levensbelang.

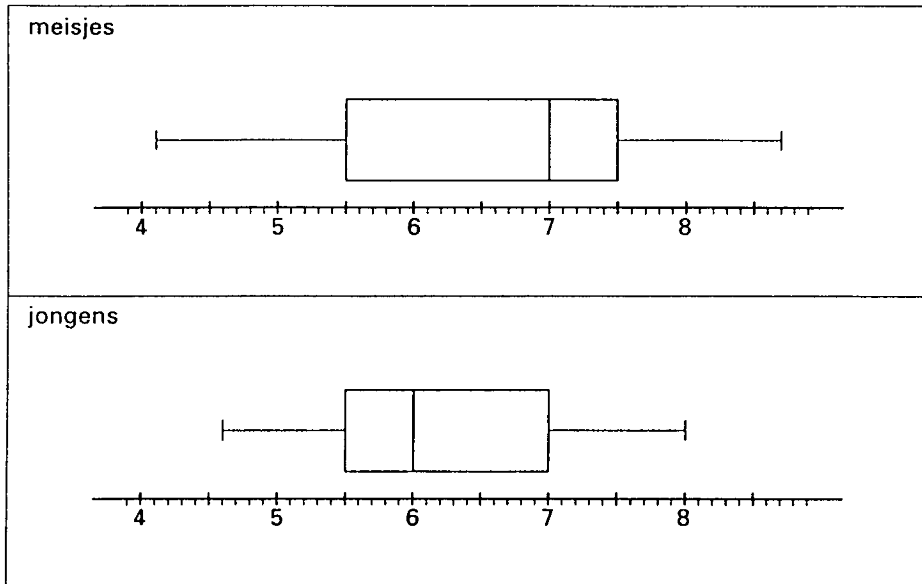
Tenslotte?
Tenslotte ben ik van mening dat het tijdschrift Pythagoras gratis moet worden!

Martinus van Hoorn.

● Werkblad ●

▶ Boxplot wiskunde-cijfers

Een groot aantal leerlingen heeft een schoolonderzoek wiskunde gemaakt. De cijfers werden berekend met één cijfer achter de komma. De resultaten zijn in twee boxplots weergegeven.
Het eerste boxplot gaat over de resultaten van de meisjes, het tweede over de resultaten van de jongens.



2p **5** ☐ Wat is bij de jongens het laagste cijfer?

2p **6** ☐ Welk percentage van de meisjes haalde een cijfer boven de 7,5?

Van alle leerlingen die meededen hadden 114 leerlingen een cijfer onder de 7. Dat waren precies evenveel jongens als meisjes.

5p **7** ☐ Hoeveel leerlingen deden er in totaal mee aan het schoolonderzoek? Leg je antwoord uit.

Gerda beweert dat de meisjes het schoolonderzoek beter hebben gemaakt dan de jongens.

2p **8** ☐ Hoe zou Gerda de gegevens uit de boxplots gebruikt kunnen hebben om tot haar conclusie te komen?

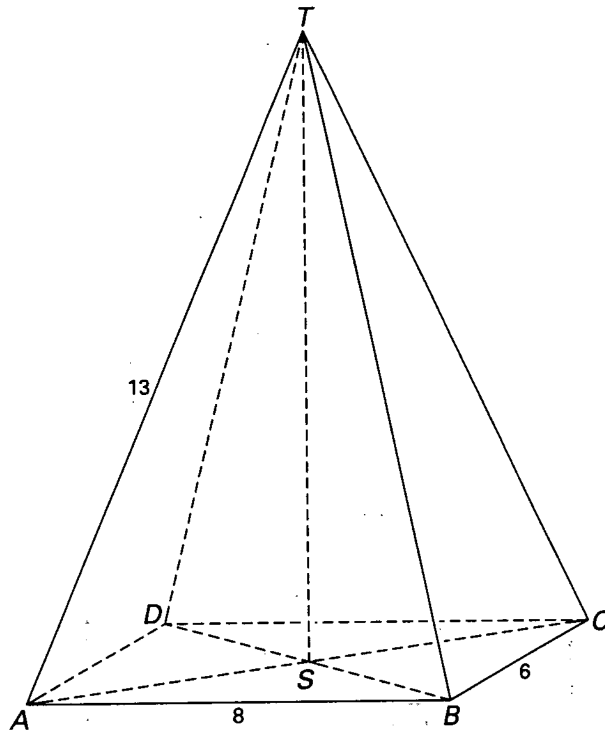
Bert beweert dat de jongens het schoolonderzoek net zo goed hebben gemaakt als de meisjes.

2p **9** ☐ Welk argument kan hij gebruikt hebben voor zijn conclusie?

Uit: Examen vbo/mavo D (experimenteel), 1993, eerste tijdvak.

● Werkblad ●

▶ Piramide



Van de hierboven getekende piramide *T.ABCD* is het grondvlak een rechthoek van 8 bij 6 cm.
S is het snijpunt van *AC* en *BD*.
TA = *TB* = *TC* = *TD* = 13 cm.

3p **25** ☐ Bereken de hoogte *TS*.

5p **26** ☐ Bereken hoe groot $\angle ATC$ is (afronden in graden).

Op lijnstuk *TS* ligt een punt *P*.
De inhoud van de piramide *P.ABCD* is 128 cm^3.

5p **27** ☐ Bereken de lengte van *AP* (afronden in mm).

Uit: Examen vbo/mavo D(experimenteel), 1993, eerste tijdvak.

● Bijdrage ● ● ● ●

▶ De wiskunde van Sinterklaas

Jan Breeman

Sinterklaas vieren in de klas. Surprises maken. Het gebeurt gelukkig nog steeds. Eerst lootjes trekken. Spannend. Net op het moment dat je blij bent omdat je de naam van een leuk klasgenootje getrokken hebt, blijkt dat de loting over moet omdat iemand anders een briefje met de eigen naam heeft.
Hoe groot is de kans dat een loting over moet? En, is die kans sterk afhankelijk van de groepsgrootte?

We proberen daar achter te komen. De kans dat x personen de eigen naam trekken bij een groep van n personen duiden we aan met $P(x, n)$. De kans dat de loting niet over hoeft bij een brugklas van 30 leerlingen is dus $P(0, 30)$.[1]

Zoals zo vaak helpt 'klein beginnen'. Niemand gaat natuurlijk loten bij $n = 2$, maar de kansverdeling luidt:

x	0	1	2
$P(x, 2)$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

Bij $n = 3$ krijgen we:

x	0	1	2	3
$P(x, 3)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	0	$\frac{1}{6}$

Tel maar na: **123** (3) 2**13** (1) 312 (0)
132 (1) 231 (0) 3**2**1 (1)

Direct duidelijk wordt voor $n > 1$:

x	0	1	...	$n-1$	n
$P(x, n)$				0	$\frac{1}{n!}$

$P(n-1, n) = 0$ geldt altijd; als $n - 1$ leerlingen hun eigen naam trekken, dan trekt ook de n-de leerling de eigen naam.

Op brugklasniveau houdt het denken vermoedelijk op bij $n = 4$. Op dat niveau is het uitschrijven van de 24 permutaties de enige mogelijkheid (maar uiterst zinvol!).

1234 (4)	21**34** (2)	31**2**4 (1)	4123 (0)
1243 (2)	2143 (0)	3142 (0)	41**3**2 (1)
1324 (2)	23**1**4 (1)	**3**2**1**4 (2)	4**2**13 (1)
1342 (1)	2341 (0)	3**24**1 (1)	**4**2**3**1 (2)
1423 (1)	2413 (0)	3412 (0)	4312 (0)
1432 (2)	24**3**1 (1)	3421 (0)	4321 (0)

En we vinden:

x	0	1	2	3	4
$P(x, 4)$	$\frac{9}{24}$	$\frac{8}{24}$	$\frac{6}{24}$	0	$\frac{1}{24}$

Het probleem is een goede introductie op systematisch tellen en het kansbegrip. Als we echter ophouden bij $n = 4$, dan kunnen we beter de context omzetten naar een gezin van 4 personen.

En wat doet u? Stoppen of doorgaan?
U koos voor doorgaan. Zeker weten?
We zoeken P(0,4) opnieuw, maar nu door gebruik te maken van de combinatoriek en de somregel. Noem G_i de gebeurtenis dat persoon i de eigen naam trekt. Dan geldt:
$P(0,4) = 1 - P(G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4)$
De somregel zegt: $P(G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4) =$

$$\sum P(G_i) - \sum_{j>i} P(G_i \cap G_j) +$$

$$+ \sum_{k>j>i} P(G_i \cap G_j \cap G_k) - P(G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4)$$

Nu is bv. $P(G_1) = \frac{3!}{4!}$, want welke briefjes de personen 2, 3 en 4 trekken is niet van belang zodat

$$\sum P(G_i) = 4 \cdot \frac{3!}{4!} = 1$$

Verder is bv. $P(G_1 \cap G_2) = \frac{2!}{4!}$ zodat

$$\sum_{j>i} P(G_i \cap G_j) = \binom{4}{2} \cdot \frac{2!}{4!} = \frac{1}{2!}$$

Ook is bv. $P(G_1 \cap G_2 \cap G_3) = \frac{1!}{4!}$ zodat

$$\sum_{k>j>i} P(G_i \cap G_j \cap G_k) = \binom{4}{3} \cdot \frac{1!}{4!} = \frac{1}{3!}$$

En $P(G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4) = \frac{1}{4!}$

Dus $P(0,4) = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$

Gelukkig levert dit ook $\frac{9}{24}$ (anders was u vast kwaad geworden!). De grote winst is echter dat op overeenkomstige wijze $P(0, n)$ voor elke $n > 1$ gevonden kan worden. Zo is bv.

$$P(0, 30) = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + \frac{1}{30!}$$

Leerlingen in de bovenbouw zullen geen moeite hebben om in te zien dat $P(0, n)$ vanaf $n = 6$ vrijwel niet verandert bij toenemende n. En eigenlijk is dat toch heel verrassend! De kans dat een loting in één keer goed gaat hangt dan nauwelijks af van de groepsgrootte en bedraagt ongeveer 0,368.

Opmerkelijk is dat $P(0, n)$ convergeert naar e^{-1} (leerlingen met wiskunde B kunnen dit begrijpen als ze wel eens van hogere graads benaderingen hebben gehoord, in het bijzonder

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$).

Nog even doorzetten voor de totale algemene kansverdeling. We hebben reeds:
$P(0, n)$, $P(n - 1, n)$ en $P(n, n)$.
Nu nog $P(t, n)$ met $1 \leq t \leq n - 2$. In dit geval trekken dus t personen hun eigen naam en $n - t$ personen niet. Met enig nadenken blijkt:

$$P(t, n) = \frac{\binom{n}{t} \cdot P(0, n - t) \cdot (n - t)!}{n!}$$

immers $P(0, n - t) \cdot (n - t)!$ is het aantal permutaties van $n - t$ personen waarbij geen van deze personen de eigen naam trekt.
Vereenvoudiging levert:

$$P(t, n) = \frac{1}{t!} \cdot P(0, n - t)$$

In het bijzonder valt hieruit af te leiden dat $P(1, n) = P(0, n - 1)$, zodat ook al snel geldt $P(1, n) \approx 0{,}368$

We zijn er. Resumerend voor $n \geq 2$:

$$P(0, n) = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \cdot \frac{1}{k!}$$

$$P(n - 1, n) = 0 \quad P(n, n) = \frac{1}{n!}$$

$$P(t, n) = \frac{1}{t!} \cdot P(0, n - t) \text{ met } 1 \leqq t \leqq n - 2$$

Formules waar een computer geen problemen mee heeft zoals blijkt uit de volgende tabel (de aantallen permutaties zijn extra vermeld om te benadrukken dat we de brugklassers het uitschrijven van alle mogelijkheden niet moeten opgeven, ook niet als strafwerk!).

Bij 15 personen

x	Aantal permutaties	$P(x, 15)$
0	481.066.515.734	0,36788
1	481.066.515.735	0,36788
2	240.533.257.860	0,18394
3	80.177.752.655	0,06131
4	20.044.438.050	0,01533
5	4.008.887.883	0,00307
6	668.147.480	0,00051
7	95.450.355	0,00007
8	11.930.490	0,00001
9	1.326.325	0,00000
10	132.132	0,00000
11	12.285	0,00000
12	910	0,00000
13	105	0,00000
14	0	0
15	1	0,00000

15! = 1.307.674.368.000

Noot

1. De kans $P(0,n)$ is eerder beschreven.
Zie onder meer Euclides 63-7 (K. A. Post).

● Serie ● ● ● ● ●

'Rekenen in W 12-16'

► Verhoudingen: toegepast

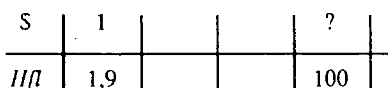
Ed de Moor

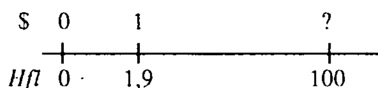
Vreemd geld is lastig. In de USA kost een Cola 1 dollar. Die dollar heb je moeten kopen voor *f* 1,90. Handige rekenaars ontwikkelen hiervoor vuistregels. Bijvoorbeeld de Amerikaanse prijzen zijn in Hollands geld ongeveer het dubbele. Een betere regel is tweemaal zoveel maar dan een beetje minder. Slechts weinigen rekenen met de operator × 1,9. Nu het omgekeerde. Hoeveel dollars krijg je voor honderd gulden? De helft, meer dan de helft of juist minder? Geld wisselen is een verhoudings-vraagstuk net als metriek en radervraagstukken dat zijn. Zelfs de kleinste kinderen kennen het inwisselen al van het knikkerspel:
1 super = 2 bammen = 10 knikkers.

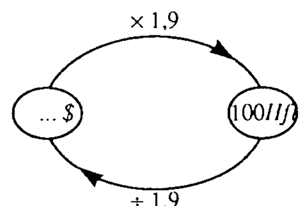
Veel dagelijkse toepassingen komen op verhoudingen neer. De eenvoudigste gaan over de tafels van vermenigvuldiging: 1 doosje bevat 6 eieren, hoeveel eieren in 15 doosjes? Dan alle vraagstukken over gebonden grootheden als gewicht-prijs, afstand-tijd enzovoorts, die al direct veel lastiger zijn omdat er continue grootheden in het geding zijn. Bij mengsels en procentrekenen maken we ook gebruik van verhoudingen en tenslotte is alles over samengestelde grootheden als snelheid, dichtheden en dergelijke onder deze noemer te stellen. En dan laten we de visuele en meetkundige verhoudingen zoals schaal nu maar buiten beschouwing.
De didactische ontwikkelingen van de laatste decennia hebben een aantal modellen opgeleverd, waarvan we de drie belangrijkste afgebeeld hebben. De *verhoudingstabel* is vooral geschikt voor vraagstukken met een eenvoudige structuur. De *tweeschalige getallenlijn* heeft door zijn ordening meer een meetkarakter en biedt steun bij het schatten. De *operator* is het meest formele model en zou in het VO zijn diensten kunnen bewijzen, vooral omdat de samenhang tussen de inverse operaties hierbij zo mooi gevisualiseerd wordt. Dit laatste kan natuurlijk alleen als de leerlingen in staat zijn de structuur van een rekentoepassing te ontrafelen en als ze in staat zijn schattingen te doen met de gegevens om die daarna zonodig in de zakrekenmachine in te voeren. Uit onderzoek blijkt dat de getalgegevens (grote, kleine, kommagetallen) een enorme invloed hebben op de resultaten.

Theoretisch zijn er drie hoofdtypen van numerieke verhoudingsvraagstukken te onderscheiden:
- vergelijken van verhoudingen a : b ≟ c : d
- gelijkwaardige verhoudingen maken a : b = ? : ?
- vierde evenredige bepalen a : b = c : ?

De eerste twee typen worden nog al eens onderbelicht, maar ze zijn voor de praktijk van het rekenen minstens zo belangrijk als de 'vierde evenredige'. Mag ik de lezer uitdagen zelf eens toepassingen bij de verschillende typen en de daarbij te gebruiken modellen te bedenken. Voor wie dieper in deze rekenmaterie wil doordringen verwijs ik naar het 'Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs', jaargang 8, nr 3 en nr 4 en jaargang 9, nr 1, 2, 3 en 4 (Freudenthal instituut).







Basisvorming getoetst

Bram van der Wal

Met het verschijnen van de afsluitende toetsen voor de basisvorming, opgesteld door het Cito, is opnieuw een stukje helderheid gekomen over hoe de wiskunde er in de eerste jaren van het voortgezet onderwijs uit kan gaan zien.
De afgelopen jaren heeft de COW middels publicaties als Trajectenboek, achtergrondenboeken, lespakketten en experimentele examens een beeld geschetst van het wiskundeonderwijs in de komende jaren.
Hoewel de COW zich bij haar ontwikkelingen steeds heeft georiënteerd op de stand van zaken rond de basisvorming kan niet gezegd worden dat beide vernieuwingen synchroon liepen.
Daarvoor was de COW al te lang bezig en bleven (en blijven) de kerndoelen van de basisvorming erg vaag.

Nu er een proeve van de afsluitende toetsen bij de scholen is bezorgd lijkt het interessant deze toetsen op een aantal aspecten te beoordelen:

- De basisvorming kent voor alle leerlingen in het voortgezet onderwijs dezelfde kerndoelen. Weliswaar mogen deze doelen voor de onderscheiden leerlingen (vbo t/m vwo) na twee, drie of vier leerjaren getoetst worden. Het gaat echter om dezelfde doelen.
Hoe geeft het Cito vorm aan dit probleem?
- De basisvorming wordt voor het vbo, zo is algemeen de verwachting, na vier jaar afgesloten. Voor het eveneens vierjarige vbo worden experimentele examens gemaakt. Hoe verhouden deze examens zich met de afsluitende toets? Dat was uiteraard ook de vraag voor de leerplanontwikkelaars van de COW.*
- De experimentele examens voor mavo op C- en D-niveau krijgen ondertussen een eigen smoel. Welke relatie is er te ontdekken met de afsluitende toets?
- Tenslotte misschien het meest belangrijke aspect. Hoe interpreteert het Cito de kerndoelen? Of anders gezegd: wat wordt verondersteld de wiskundige verworvenheid te zijn na een aantal jaren basisvorming? Zeker gezien alle onzekerheid en twijfel rond met name het onderdeel algebra een aspect waar met belangstelling naar uitgekeken wordt.

Proeve

De rondgestuurde opgaven pretenderen niet een afsluitende toets te zijn. Het zijn slechts voorbeeldopgaven uit de diverse domeinen. Dat is jammer. Er ontstaat daardoor op z'n minst een incompleet beeld.
Indien de voorbeeldopgaven de intentie hebben om een discussie op gang te brengen is dat rijkelijk laat. Toch laten ze bijna geen andere interpretatie toe. De opgaven vormen een bonte verzameling waarin met de beste wil van de wereld geen eenheid valt te ontdekken. Zelfs het feit dat de opgaven, op een enkele uitzondering na, realistische problemen lijken voor te schotelen kan daaraan niets veranderen.

Algebra

Zoals in de inleiding opgemerkt, is er nog altijd veel onduidelijkheid rond de algebra in de basisvorming. Daarom wordt in deze bijdrage onevenredig veel aandacht besteed aan dit deel.
Voor het domein waarin algebra is ondergebracht zijn drie voorbeeldopgaven, waarvan op het eerste gezicht twee algebravraagstukken, gecomponeerd. Hierna is de eerste opgave afgedrukt.

Door de punten (5, 6) en (9, 9) gaat een rechte lijn.
a. Geef de coördinaten van een ander punt dat ook op deze lijn ligt.
Gaat de lijn ook door de oorsprong?
b. Op de lijn ligt ook een punt waarvan de eerst coördinaat 25 is.
Wat is de tweede coördinaat van dit punt?

Deze opgave geeft al direct de nodige verwarring.
Wat is de zin van dit vraagstuk?
Afgaande op het feit dat deze opgave is ondergebracht in dit domein mag je verwachten dat hier sprake is van een grafiek van een functie, als het even kan van een toepassingsgerichte.
Helaas blijkt dat nergens uit.
Er is slechts sprake van een rechte lijn die door twee punten gaat. Het opzoeken van een ander punt dat op deze lijn ligt zal geen problemen opleveren. Een simpele tekening geeft immers de oplossing.
Gaat deze lijn door de oorsprong? De tekening levert opnieuw overduidelijk het antwoord. Nee, de lijn gaat door (0, 2). Of net niet? In ieder geval niet door (0, 0). 'Dat kun je zo zien', merken leerlingen terecht op.
Deze opgave was nog 'zinvol' geweest als de lijn door de punten (5, 4) en (9, 7) zou gaan. Het snijpunt met de y-as was dan (0, 0,25), een punt nauwelijks zichtbaar verwijderd van de oorsprong.
Enkele vragen dringen zich op. Mogen de leerlingen in de tekening meten? Het correctiemodel geeft geen uitsluitsel. Of wordt verondersteld dat de leerlingen eerst de vergelijking van de lijn bepalen? In dit geval $y = 3/4 \cdot x + 2{,}25$.
Het correctiemodel geeft evenmin aanleiding tot deze veronderstelling. De vraag blijft of kerndoel 12 : 'een relatie opstellen uit een grafiek' aanleiding geeft tot deze interpretatie.
Het is een raadsel waarom in deze opgave niet is gekozen voor een probleem dat wortels heeft in de dagelijkse werkelijkheid. Er zijn duizenden voor de hand liggende situaties.
In het onderhavige geval had het voor de hand gelegen uit te gaan van de huur van een waterfiets, roeiboot, punter of kajak in Giethoorn. De huurprijs bestaat uit een vast bedrag van 2 gulden en 3 kwartjes per uur. Met deze gegevens, opstapvragen, een tabel en een grafiek is het mogelijk zo'n probleem voor leerlingen tot leven te brengen.
Door een concurrent uit Giethoorn te laten opdraven met een vaste prijs van 4 gulden en twee kwartjes per uur zijn interessante vergelijkende onderzoekjes te doen.

Vetzucht

Het tweede algebravraagstuk lijkt geheel in de pas te lopen met de vernieuwing in het wiskundeonderwijs. Nadere bestudering levert een andere conclusie op. Er wordt weliswaar begonnen met een 'realistische' instap.

> Vetzucht is een probleem in Nederland. Een huisarts maakte vorig jaar een lijstje van de tien meest voorkomende klachten in de huisartsenpraktijk. Vetzucht prijkte bovenaan de toptien.

Vetzucht gaat over klachten die te maken hebben met te dik worden door te veel eten.
Het percentage lichaamsvet van iemand is te benaderen met de vuistregel (formule)

$$v = \frac{gewicht}{lengte^2}$$

Hierbij is voor een persoon:
v = het percentage lichaamsvet
gewicht = het gewicht in kilogrammen
lengte = de lengte in meters

Michiel is 1,80 meter lang; zijn gewicht is 78 kilo.
a. Bereken met de formule zijn percentage lichaamsvet.
Geef je antwoord in gehele procenten.

Na de introductie van vetzucht worden helaas niet minder dan 11 regels besteed aan een nadere omschrijving van dit fenomeen en de formule voor de berekening ervan. Is vetzucht hetzelfde als percentage lichaamsvet?
Opgave a betreft het substitueren van enkele variabelen in een formule. Je vraagt je dan af bij het antwoord van 24 % of Michiel vetzucht heeft? Wat is het realistische nu aan het vraagstuk? Welke leerling ervaart dit als een realistisch probleem?
In opgave b wordt het bij het berekenen van het te verwachten percentage lichaamsvet van iemand die 1,95 lang is nog theoretischer. Gaat het hier om iemand die voldoet aan de vuistregel lengte - gewicht, die wel of niet aan vetzucht lijdt en wanneer doe je

dat? Lezen we, of onze leerlingen, in bijvoorbeeld Privé en Story over de procenten vet van weet ik welke zangeres die voor de derde keer verlaten is door haar minnaar, in dit geval de vader van haar jongste baby? Is het interessant te weten hoe hoog je percentage vet is? Wanneer is er sprake van vetzucht?
Afgezien van het werkelijksgehalte van deze opgave is de wiskundige inhoud ver onder de maat. Er wordt slechts twee keer een eenvoudige substitutie gevraagd. Met dit voorbeeld voor ogen moeten we inderdaad vrezen voor de toekomst van de algebra in de onderbouw.

b. Een vuistregel voor het verband tussen de lengte en het gewicht van de mens is dat hij gemiddeld evenveel weegt als het aantal centimeters boven de meter.
Het gewicht van iemand die 1,60 meter lang is, is dus ongeveer 60 kg.
Wat volgt hieruit voor het te verwachten percentage lichaamsvet van iemand die 1.95 meter lang is?

Als we dit vraagstuk vergelijken met vraagstukken uit de experimentele examens dan valt op dat het bij de laatste steeds gaat om het werken aan en oplossen van min of meer realistische problemen. Bij de voorbeeldopgaven wordt een zelfde soort probleem ge-(mis-)bruikt om een aantal opdrachten aan op te hangen.

Voorbeelden van het verschil in benadering van een probleem zijn de opgaven 12 t/m 15 van het experimentele B-examen en de opgaven 20 t/m 24 van het experimentele D-examen. Zowel bij de B-opgaven waar het gaat om de schatting van de lengte van een volwassene uitgaande van de lengte van een kind op bepaalde leeftijd als bij de D-opgaven waar het gaat om de relatie tussen de omlooptijd van een planeet en de afstand planeet - zon is sprake van een probleem dat uitdagend genoeg is om meer van te weten en het dus uit te rekenen.

Al met al moet de conclusie luiden dat het onderdeel algebra op geen enkele wijze op een bevredigende manier uit de verf komt. Noch de inhoud, noch het realistisch gehalte, noch de presentatie voldoet aan de verwachtingen. Het lijkt waarachtig wel dat we al verwend zijn met het materiaal dat COW ons de laatste examens liet zien. Zo kan het immers ook!

Andere onderdelen

Wat geldt voor de algebravraagstukken geldt in meer of mindere mate ook voor de andere onderdelen. Bij de meetkunde een traditioneel vraagstuk op het terrein van Pythagoras, een uitslag van een doosje dat in de lucht blijft hangen en een vraagstuk over plaatsbepalen dat in de goede bedoelingen blijft steken. Waarom het Cito niet gekozen heeft voor een opgave waar de nieuwe lijnen van de meetkunde in te herkennen zijn is vreemd.
Dat het anders kan laten de eerder genoemde experimentele examens zien. Bij het B-examen een aantal opdrachten aan de hand van een wikkel van een chocoladedobbelsteen en bij het C/D-examen de windroos op de brug in Monnickendam.

Een analyse van de voorbeeldopgaven op andere in de inleiding genoemde aspecten kan, hoe nodig ook, in het kader van dit artikel niet. Met name de manier waarop –nogmaals dezelfde ! – kerndoelen aan leerlingen met verschillende capaciteiten op verschillende momenten worden getoetst is een belangrijke vraag. Daar zal nog het nodige over gezegd moeten worden. In ieder geval lijkt het voorliggende materiaal daar geen goed antwoord op te geven.

Resumé

De hierboven uitgewerkte voorbeelden van het Cito laten zien dat er nauwelijks sprake is van afstemming op het in overvloed beschikbare materiaal van de COW. Dat is jammer. Waar we in ons land een unieke kans krijgen om het wiskundeonderwijs voor de onderbouw (in de volle breedte !) van het voortgezet onderwijs zinvol – in de zin van voor het dagelijks leven van belang – te maken zijn eindtoetsen en experimentele examens bij uitstek de instrumenten om daar richting aan te geven. Het is duidelijk dat de COW met haar jarenlange ervaring, vooral door haar intensieve contacten met een aantal scholen, gelouterd is in het beoefenen van realistische wiskunde. Deze ervaring mag niet verdwijnen bij het samenstellen van de eindtoetsen voor de basisvorming en straks bij de definitieve uitvoering van de C/D-examens. Bovendien is het niet nodig dat iedereen, in dit geval het Cito, het wiel opnieuw uitvindt.

Nu de schoolboeken, elk op hun eigen wijze, ingrijpend zijn gewijzigd met het nieuwe programma als maatstaf mag het Cito met de afsluitende toetsen niet op de rem trappen.
Want, eerlijk is eerlijk, bij nadere bestudering van de voorbeeldopgaven zullen de wiskundedocenten constateren dat het 'inderdaad allemaal wel meevalt met die veranderingen' en overgaan tot de orde van de dag. En daar is het niet om begonnen.

* Wiskunde 12-16, een boek voor docenten, pag.147.

Mededeling

Lezingencyclus

De Hogeschool Midden Nederland organiseert in het kader van de eerstegraadsopleiding wiskunde een lezingencyclus. Alle belangstellenden zijn hierbij van harte welkom
De serie is op maandag 6 december 1993 gestart met een lezing door **Aad Goddijn** (Freudenthal Instituut), onder de titel *Oude meetkunde in het nieuwe programma.*

De volgende lezingen zijn:
Woensdag 16 februari 1994: **Henk van der Vorst** (hoogleraar Mathematisch Instituut Utrecht) over *Computational Science.*
Woensdag 18 mei 1994: **Frits Beukers** (universitair hoofddocent Mathematisch Instituut Utrecht) over het *Fermat-vermoeden.*

Plaats: het Auditorium van de Faculteit Educatieve Opleidingen, Archimedeslaan 16, 3584 BA Utrecht.
Tijd: 20.00 tot 21.30 uur.
Verdere informatie:
Peter Lorist, telefoon 030-547224.

Reactie 'Basisvorming getoetst'

Harm Boertien

Het is verheugend te merken dat in Euclides de belangstelling voor de afsluitende toetsing van de basisvorming toeneemt. Zeker als dat gebeurt in een artikel dat een beroep doet op de kritische zin van de lezer. Die zal zich bij het lezen ervan ongetwijfeld hebben afgevraagd of de gegeven argumenten volledig en de conclusies juist zijn. Welnu om daarop in te gaan deze reactie. Gezien de beperkte ruimte zullen we alleen op de hoofdzaken ingaan. Hoofdlijn ervan is dat er andere visies op de afsluitende toetsing van de basisvorming mogelijk zijn dan die uit het artikel. Dit laten we zien door enkele stellingen uit het artikel eens op een rij zetten:

a. De afsluitingstoetsen moeten naadloos op het COW-materiaal afgestemd zijn.
b. Elke voorbeeldopgave afzonderlijk moet precies zo gekozen zijn dat ze aan de (niet expliciet beschreven) eisen van een docent (de schrijver) voldoen.
c. Het Cito trapt op de rem. De toetsing moet voorop lopen bij het richting geven aan onderwijsontwikkeling. Vooral bij kerndoelen en leerstof waarover veel discussie geweest is en nog is (algebra), moet de toetsing uitsluitsel geven hoe deze uitgewerkt moeten worden.

Mijns inziens is geen van de voorgaande beweringen houdbaar. De uitwerking die de COW van het nieuwe wiskundeprogramma gegeven heeft, is namelijk slechts één van de mogelijke (goede) voorbeelden. Want natuurlijk is het mogelijk (nogal) verschillende leergangen te schrijven die bedoeld zijn als uitwerkingen van het nieuwe wiskundeprogramma en bij elke leergang is er een aantal gebruikers die deze uitwerking geschikt vindt. Wie is gerechtigd deze leergangen te beoordelen op hun uitwerking? Hoe zou dat moeten gebeuren? Van der Wal zal toch niet willen dat zoiets gaat gebeuren. Bovendien zijn de kerndoelen van de basisvorming bewust vaag geformuleerd om behoorlijk verschillende uitwerkingen toe te laten. Geen voorgeschreven staatsleerplan dus en ook geen uniforme uitwerking.

Verder zijn ook de voorbeeldopgaven zoals het Cito die heeft gemaakt niet meer dan voorbeelden, met natuurlijk alle beperkingen die dat inhoudt (weinig samenhang bijvoorbeeld). Bij de kerndoelen zijn heel veel verschillende uitwerkingen in opgaven mogelijk. Elke opgave geeft echter slechts één uitwerking weer. Het is waarschijnlijk dat bij elke uitwerking (opgave) sommige docenten hem waarderen en dat anderen hem verfoeien. In het artikel van Van der Wal is de waardering van de opgaven verpakt met de term 'wel/niet realistisch'. Deze kan voor verschillende docenten echter heel verschillende betekenissen hebben. Waar het om gaat is hoeveel docenten een opgave redelijk vinden om aan de leerlingen bij de afsluiting van de basisvorming voor te leggen, waarbij een leerling elke wiskundig verantwoorde oplossingsmethode gebruiken mag.

Tenslotte mag de toetsing niet zodanig ver vooruit lopen bij het richting geven aan het proces van de onderwijsontwikkeling dat docenten 'schrikken van de veranderingen'. Zeker bij een landelijke toets moet de afstemming landelijk gericht zijn en de functie vervullen die de overheid heeft vastgesteld. Bij de afsluiting van de basisvorming is dat: laten zien wat de leerlingen van de basisvorming opgestoken hebben. De bereikte leerlingresultaten zullen dus nogal wat mogen verschillen. Dat is duidelijk een andere functie dan die van examens waar een cesuur voor een normgerichte interpretatie van de scores zorgt. Een vergelijking met examenopgaven is dus niet geheel terecht.

De afsluitende toetsing is bedoeld om op een efficiënte manier zoveel mogelijk over de leerlingen te weten te komen wat betreft het beheersen van de wiskundekerndoelen. Daarbij ligt de nadruk op toepassing, vaardigheid en samenhang in beheersing. De resultaten op de landelijke toetsing moeten dus zicht geven op beheersing van essentiële (formele) wiskundige vaardigheden die leerlingen (later) vaak nodig hebben, op het kunnen toepassen daarvan (transfer) en op de vaardigheid zijn weg te vinden in een min of meer ingewikkeld praktisch probleem (complexiteit aankunnen).

In de toetsen moet voldoende aandacht gegeven worden aan variatie in soort opgaven. Ze moeten immers bij het onderwijs als geheel en bij alle leerlingen passen. Er is ook niet een bepaald niveau waarop de opgaven zich moeten richten. Slechts vereist is dat alle leerlingen in de toetsen uitdagende opgaven moeten aantreffen. Dit betekent dat er geen standaardtypen van opgaven in moeten voorkomen. Dat ze er ook op gericht zijn transfer te meten, betekent eveneens dat de opgaven dikwijls niet in precies dezelfde vorm in het onderwijs behandeld zijn.
Als gevolg van het streven naar variatie is er gekozen voor zoveel mogelijk contexten/opgaven en zijn de opgaven meestal nogal klein van omvang. Overigens wordt er door de overheid waarschijnlijk een onafhankelijke instantie die onder de Cevo ressorteert, in het leven geroepen om de afsluitingstoetsen landelijk vast te stellen. Daarin zullen allerlei zaken zeker nog nader bezien worden.

Een vraag apart is in hoeverre één toets aan alle eisen die men wil stellen kan voldoen. Dit wordt nader onderzocht door middel van proefafnames in 1994. Dan wordt ook aan docenten gevraagd hoe de opgaven bij hun onderwijs passen.

Resumerend: het Cito streeft bij de afsluitingstoetsing wiskunde naar:
- diversiteit in contexten en opgaven
- aansluiting bij het totale onderwijsveld
- afstemming op alle leerlingen.

De een waardeert dit, de ander niet.

▶ Een reactie op een reactie

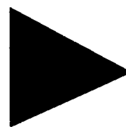
Bram van der Wal

Eerlijk gezegd valt de reactie van het Cito op het artikel `Basisvorming getoetst' me erg tegen. Liever dan te reageren op een aantal vragen trekt ze zich terug op eigen stellingen. Hopelijk zal het Cito de komende tijd haar toren verlaten en de frisse lucht opsnuiven die in wiskundeland merkbaar is.
Beter dan voor de zoveelste maal te herhalen wat het Cito meent te moeten toetsen was het zinniger geweest in te gaan op de vragen die er nog steeds zijn rond de afsluiting van de basisvorming. Vooral omdat het Cito daar een belangrijke rol in speelt.

Op het gevaar af in herhalingen te vervallen wil ik toch nog enkele zaken opnieuw aan de orde stellen.

Een goede lezer zal merken dat ik nergens betoog dat de afsluitingstoetsen naadloos op het COW-materiaal moeten aansluiten. Ik constateer slechts enigszins jaloers te worden op de experimentele examens van het laatste jaar als ik deze vergelijk met wat het Cito voor de voorbeeld-afsluitingstoets componeerde. Verder merk ik op dat het voor leerlingen van het vbo die mogelijk in één schooljaar én de afsluitingstoets én examen afleggen wel aardig zou zijn als er enige overeenkomst in beide produkten zou zijn. Voor degene die deze leerlingen kent - in iets mindere mate geldt dit evenzeer voor de mavo-leerling - een vraag van de eerste orde waar je niet zomaar overheen moet lopen.
Dat elke voorbeeldopgave zou moeten voldoen aan de eis van elke afzonderlijke docent lijkt me te veel van het goede. Ik denk dat het Cito daar terecht niet aan kan voldoen. Maar het lijkt niet teveel gevraagd als men, het is eerder gezegd, de frisse wind die er op dit moment waait eens opsnuift.
Ik beweer nergens dat het Cito voorop zou moeten lopen bij het richting geven een de onderwijsontwikkeling. Daar hoeven we ons gezien de voorbeeldopgaven ook geen zorgen over te maken. Toch kan niet ontkend worden dat eindtoetsen, of ze nu de functie hebben van een examen dan wel de leerling uitdagen te laten zien wat hij heeft opgestoken, als onbedoeld neveneffect hebben dat het onderwijsveld zich er naar gaat richten. De Cito-eindtoetsen van de basisschool zijn een levend bewijs van hoe dit materiaal binnen de school werkt.

Al met al hoeft het Cito de trend niet te zetten, dat is al gedaan. Wat in alle redelijkheid gevraagd mag worden is dat het Cito laat merken dat er in ons land een nieuw leerplan is ingevoerd. Nota bene gebaseerd op de ideeën van de basisvorming. En dat zou het Cito moeten toetsen dacht ik zo.



Mededeling

Wintersymposium 1994

Schoolwiskunde toegepast!

Het Wintersymposium 1994 gaat over *toepassingen* van de wiskunde op het gebied van het *weer*, het *geld* en het *milieu*.
De voordrachten zullen gehouden worden door medewerkers van het K.N.M.I., fa. Joh. Enschede en het R.I.V.M.
Het symposium vindt plaats op **8 januari 1994** van 10.00 tot 15.00. De plaats van handeling is op de nieuwe locatie van het Stedelijk Gymnasium Johan van Oldenbarnevelt, Thorbeckeplein 1, 3818 JL Amersfoort.
De toegang tot het symposium is gratis.
Wie deel wil nemen aan de lunch moet voor 24 december *f* 15,- overmaken op gironummer 4157477 t.n.v. S. Garst te Oude Tonge.

▶ Wiskundeleerwegen in het (i)vbo[1]

Jos ter Pelle

Een onlangs gehouden onderzoek onder 169 (i)vbo-scholen[2] leverde enkele resultaten op, die interessant kunnen zijn voor allen die betrokken zijn bij het wiskunde-onderwijs aan zwakke[3] leerlingen.
De hoofdvraag van het onderzoek was hoe scholen straks, met de invoering van de basisvorming en de nieuwe wiskundeprogramma's, hun wiskunde-onderwijs (her)inrichten. Preciezer gesteld: welke leerwegen bieden scholen voor zwakke leerlingen?

Na een korte introductie licht ik de belangrijkste conclusies uit het onderzoeksverslag[4]. Elke lezer zal de conclusies verder kunnen interpreteren. Aan het eind van dit artikel geef ik graag een stukje van mijn interpretatie.

Introductie

• In augustus '92 zijn de wiskunde-programma's voor de basisvorming gereedgekomen. Voor zwakke leerlingen in het vbo betreft dit het B-traject onder supervisie van de COW[5], voor de nog zwakkere leerlingen het i-traject, dat door OWI[6] werd ontwikkeld. Beide trajecten zijn inhoudelijk sterk met elkaar verwant en op elkaar afgestemd. Immers, beide gaan uit van realistische wiskunde en zijn uitwerkingen van dezelfde kerndoelen. Toch zijn beide programma's niet gelijk. Dit komt vooral doordat de (gemiddelde) niveaus van i- en B-leerlingen aan het eind van de basisvorming flink van elkaar zullen verschillen. Zowel in de praktijk op de scholen als in de nieuwe schoolboeken zien we dit verschil bevestigd.

• De onderbouwing van beide trajecten, met materiaal en ervaringen in de leerjaren 3 en 4, is achteraf bezien vrij dun[7]. De meeste energie voor de leerjaren 3 en 4 is gaan zitten in de ontwikkeling van het C- en het D-traject, vanwege de hoge prioriteit voor de ontwikkeling van nieuwe examen-programma's.

• De SLO is inmiddels, op aanvraag van beide vakverenigingen[8], met een vervolgproject voor zwakke leerlingen in de leerjaren 3 en 4 (i)vbo gestart. Met het oog op het welslagen van dit project was het van belang om te weten hoe de scholen nu en straks in de basisvorming omgaan met de nieuwe i- en B-programma's. Het gaat dan om zaken als: hoe ver zijn scholen met de voorbereiding en invoering van de basisvorming, is er een nieuwe methode aangeschaft, hoe worden leerlingen gegroepeerd, waar zitten overstapmogelijkheden, hoeveel lesuren worden voor verschillende groepen ingeruimd, hoe wordt de basisvorming afgesloten?
Al met al voldoende aanleiding tot een onderzoek, dat in de periode april-juni '93 werd uitgevoerd met medewerking van het Landelijk Steunpunt Basisvorming[9].

Conclusies

1. Meer dan een derde van de benaderde scholen blijkt bij een fusie betrokken. Ondanks dat vindt 40 % (= 68 scholen[10]) de tijd om de vragen uitgebreid en minutieus te beantwoorden. Men acht zich in het algemeen voldoende tot goed geïnformeerd over de nieuwe programma's. Belangrijke beslissingen over de (her)inrichting van het onderwijs in en na de periode van de basisvorming zijn op de meeste scholen inmiddels (mei '93) genomen.
De scholen blijken ver gevorderd in het opstellen van nieuwe lessentabellen voor alle vakken: de meeste scholen (68%) hebben de uren vastgelegd tot en met leerjaar 4. Vooral vbo/mavo-scholen met i-afdeling scoren hoog: 88 %. Tien scholen zijn er op dat moment kennelijk nog niet helemaal uit en

beantwoorden een deel van de vragen.
2. I-leerlingen worden in 39 van de 48 scholen met een i-afdeling (dus ruim driekwart) al vanaf het eerste leerjaar in afzonderlijke groepen ingedeeld. De rest doet dat vanaf klas 2 (of, soms, vanaf klas 3). Er is veelal voorzien in een hergroeperingsmoment na klas 1.
3. B-leerlingen zitten in 22 van de 68 scholen vanaf het eerste leerjaar in afzonderlijke groepen. In het tweede leerjaar is dat 27 en in het derde leerjaar 40. Er is veelal voorzien in een hergroeperingsmoment na klas 2.
4. Het blijkt dat de voorbeeldtabel die het OWI heeft opgesteld voor het toekomstige i-traject, door de 48 scholen niet geheel gevolgd wordt. OWI gaat uit van de urenverdeling 4/3/3/2. *Gemiddeld* programmeren de scholen 3,3/3,0/2,2/2,0. Er zal dus gemiddeld 1,4 jaaruur minder wiskunde worden verzorgd dan OWI adviseerde. De 18 vbo-scholen met een i-afdeling wijken nog iets meer af (1,9 jaaruur minder). Vooral in leerjaar 1 en 3 zullen de leerlingen minder wiskunde krijgen. Veel scholen programmeren 3/3/2/2 uur.
5. De voorbeeldtabel die de COW heeft opgesteld voor het toekomstige B-traject (4/3/3/3), wordt ook niet geheel gevolgd. *Gemiddeld* programmeren de scholen 3,3/3,1/3,0/2,8. Er zal dus gemiddeld 0,8 jaaruur minder wiskunde worden gegeven. Meestal gebeurt dit in klas 1. Veel scholen programmeren 3/3/3/3 uur.
6. In vergelijking met de situatie van voor de basisvorming (9,4 ± 2,5 uur), zal in het i-traject gemiddeld ruim een uur méér wiskunde gegeven worden (10,6 ± 1,9 uur).
Ook binnen het B-traject komt er meer tijd voor wiskunde: een gemiddelde toename van 0,7 uur (was 11,4 ± 2,0, wordt 12,2 ± 1,9).
De leerlingen die in de toekomst het C- of het D-traject volgen, krijgen hetzelfde aantal uren als nu: afgerond 14.
Ruim de helft van de scholen zegt de urenwijzigingen niet ingrijpend te vinden.
7. De meeste i-scholen verwachten de basisvorming via het i-traject in vier jaar te kunnen afronden. Voor het B-traject ligt dat voor tweederde van de scholen ook op vier jaar. Eén derde van de scholen verwacht na 3 jaar af te kunnen ronden. Wat betreft het C- en het D-traject zegt ruim de helft van de scholen dat in leerjaar 3 de afronding van het programma zal plaatsvinden. Ruim de helft van de scholen zegt echter ook dat het nog moeilijk te beoordelen is of de voorstellen voor de wiskunde-programma's haalbaar zijn.
8. Een kwart van de scholen verwacht dat er voor het vak wiskunde ontheffing voor groepen leerlingen zal worden aangevraagd. De helft denkt van niet en een kwart weet dat nog niet.
9. Met het oog op de basisvorming is door de meeste scholen (81%) een nieuwe wiskunde-methode aangeschaft. Er is kennelijk voldoende aanbod, gezien het feit dat men aangeeft nauwelijks behoefte aan extra materiaal voor de eerste leerjaren te hebben. Aan materiaal voor het ivbo in de hogere leerjaren blijkt wel veel behoefte te bestaan.

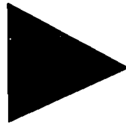
Tenslotte

Het meest opvallend vind ik dat scholen homogener groeperen, en met duidelijk minder uren dan door COW en OWI voorgesteld. De neiging is groot om op deze en andere conclusies dieper in te gaan, maar ik wil me tot één kwestie beperken. Binnen scholen met een i-afdeling ontstaat voor i-leerlingen van meet af aan een aparte leerweg met achtereenvolgens 3-3-2-2 lesuren. Een enkeling zal na 1 jaar met wat extra leerstof nog kunnen overstappen naar B (tenzij de B-leerlingen in klas 1 wel 4 uur hebben gehad). Daarna is overstappen praktisch uitgesloten. Voor een deel van de i-leerlingen zal de school na enige tijd ontheffing vragen, en naar verwachting ook krijgen. Deze groep heeft dan erg weinig wiskunde, op een laag niveau, gehad. Anderen ronden in klas 4 op zogenaamd A-niveau af. Binnen het vbo ontstaan, meestal vroeger dan later, aparte groepen van B-leerlingen voor wie C niet haalbaar lijkt te zijn. Van overstappen zal amper sprake zijn - tenzij we afstromen naar het i-traject of ophouden met wiskunde ook overstappen noemen. Deze leerlingen ronden de basisvorming in veelal 4 jaar af op B-niveau.

Eén uur minder uittrekken voor wiskunde is op zijn zachtst gezegd jammer, twéé uur minder is zeer verontrustend. Alle nieuwe methoden zijn immers van het COW- of het OWI-advies uitgegaan. De gevolgen laten zich raden en zullen spoedig zichtbaar worden. Er wordt nog scherper en vroeger geselecteerd, en/of er worden flinke stukken stof overgeslagen, en/of de druk op leerlingen (en leraren!) wordt groter om toch maar zoveel mogelijk te doen. In alle gevallen zal dit ten koste gaan van de kwaliteit en het niveau van de voorgestelde trajecten. Of deze wiskunde-trajecten dan nog een goede voorbereiding zullen blijken te zijn op diverse vervolgopleidingen, op een beetje aardig beroep, op een aardig plekje in de maatschappij? De bedoeling van COW en OWI was van wel. Als medeverantwoordelijke voor het ontwikkelen van deze leerwegen was ik daar destijds ook sterk van overtuigd. Nu uit dit onderzoek blijkt hoe scholen deze leerwegen concreet vorm geven rijzen er enige twijfels.

Noten

1. Met (i)vbo worden de schooltypen ivbo en vbo bedoeld.
2. De representatieve groep scholen bestond uit 50 categorale vbo-scholen met een i-afdeling, 51 smalle scholengemeenschappen vbo/mavo met i-afdeling en 51 zonder, 8 brede scholengemeenschappen vbo/avo/vwo met i-afdeling en 7 zonder i-afdeling.
3. Helaas hebben we hier geen betere term voor. Synoniemen als 'kwetsbaar' of 'kansarm' zijn minder adequaat. Concreet bedoelen we leerlingen van wie (om welke reden dan ook) niet verwacht wordt dat zij het C-niveau zullen behalen. Dat zijn dus niet alleen alle ivbo-leerlingen en veel van de vbo-leerlingen (zo'n 70%), maar ook sommige leerlingen in het mavo/havo/vwo.
4. Een volledig verslag van het onderzoek is voor belangstellenden kosteloos op aanvraag verkrijgbaar zolang de voorraad strekt. Bel Yvonne Schnetz, SLO secretariaat projectgroep wiskunde (i)vbo (053-840339).
5. Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs.
6. OWI stond voor Ontwikkeling Wiskundeonderwijs IBO, een projectgroep van de SLO.
7. OWI had in augustus '92 een volledig dekkend geheel van materialen voor de leerjaren 1, 2 en 3 ontwikkeld en in scholen uitgeprobeerd. W12-16, het ontwikkelteam van de COW, onderbouwde haar B-traject met ruime ervaringen in 1 en 2, en enkele experimenten in hogere leerjaren.
8. Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) en Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken- en Wiskunde-Onderwijs (NVORWO).
9. Met dank aan mw. drs. A.Vendrig voor de gedegen en accurate uitvoering van het onderzoek.
10. Verdeeld over 27 categorale vbo-scholen met een i-afdeling, 16 vbo/mavo's met i, 18 vbo/mavo's zonder i, en 5 brede scholengemeenschappen.



Boekbespreking

Dick Stafleu: *En toch beweegt zij, Geschiedenis van de natuurkunde van Pythagoras tot Newton.* Uitgeverij Boom Meppel Amsterdam ISBN 90-5352-053-8; *f*24,90; 207 blz.

Het idee dat de aarde niet het rustende middelpunt van het heelal is, maar dat zij jaarlijks als een planeet rond de zon en dagelijks rond haar eigen as beweegt, is niet van de ene dag op de andere ontstaan. Ook is het niet één persoon geweest die er voor heeft gezorgd dat dit idee door zijn tijdgenoten werd aanvaard. Reeds in de oudheid en de middeleeuwen is de aardbeweging besproken, maar in het algemeen werd zij verworpen. Zo concludeerde Buridanus (1300-1358) dat het veel eenvoudiger is aan te nemen dat de aarde om zijn as draait dan uit te gaan van een bewegende hemelbol. Om problemen met theologen te voorkomen vermeldt hij er wel bij dat dit niet zijn opvatting van de werkelijkheid is.
Oresme, een leerling van Buridanus, draagt tal van argumenten aan voor de dagelijkse beweging van de aarde, maar verwerpt dit als realiteit met een beroep op Psalm 93.
Tot ongeveer 1500 is de filosofie van Aristoteles overheersend. In de eerste helft van de zestiende eeuw publiceert Nicolaas Copernicus zijn theorie, waarin niet de aarde maar de zon in rust is. Dit is het beginpunt van een reeks theorieën die aansluiten bij het Copernicaanse wereldbeeld of die dit juist verwerpen. De discussie wordt uiteindelijk afgerond door Newton die een groot aantal eerdere theorieën weet samen te smelten in een overkoepelend systeem.

Stafleu laat de lezer deze boeiende geschiedenis mee beleven. In het eerste deel beschrijft hij de ideeën aangaande de aardbeweging van een aantal gezaghebbende geleerden uit de tijd voor Copernicus. Het tweede deel behandelt de Copernicaanse revolutie: de periode waarin het idee van de aardbeweging verandert van hypothese in een aanvaarde theorie.
Verder wordt aangetoond dat met de gedachte van een bewegende aarde tal van andere zaken zijn verbonden: magnetisme, optica, grotere waardering voor het doen van de waarnemingen en het construeren van waarnemingsapparatuur.

Het boek bestaat uit 14 hoofdstukken waarin steeds een persoon centraal staat (Pythagoras, Aristoteles, Ptolemaios, Alhazen, Peregrinus, Buridanus, Copernicus, Brahe, Kepler, Galileï, Descartes, Christiaan Huygens, Newton). Hoofdstuk 15 is een epiloog waarin de betekenis van de Copernicaanse revolutie voor de ontwikkeling van de (natuur)wetenschap wordt uiteengezet. Een bibliografie en een naamregister besluiten het boek. Een boekje om enkele zeer aangename uurtjes mee door te brengen.

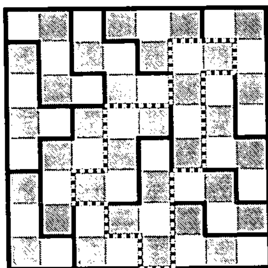
Harm Bakker

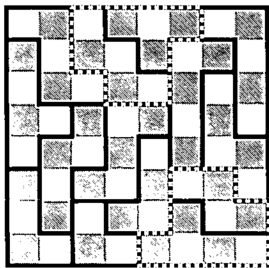
● Recreatie ● ● ● ●

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Jan de Geus, Valkenboslaan 262-A, 2563 EB Den Haag.

▶ Oplossing 647

Er moest gezocht worden naar een oplossing van 'The Chequers Puzzle', die in 1892 verscheen. Er blijken 84 oplossingen te zijn (afgezien van draaiing). Ik laat u nu 5 oplossingen zien:
In de linker figuur kunnen de drie stukjes binnen de gestreepte rand nog van plaats verwisselen. Tevens kunnen de Y en de L op de onderrand nog van plaats verwisselen.
In de rechter figuur kunnen de twee aangegeven gebieden nog van plaats verwisselen.





Een aantal inzenders draaide de stukjes om, wat niet toegestaan was. In 'Compendium of Checkerboard Puzzles' door Jerry Slocum en Jacques Haubrich (second edition, august 1993) lezen we dat er in totaal al 38 verschillende uitgaven van deze puzzel zijn verschenen. In 1927 stond er in de bijlage van een toen verschenen uitgave: 'over 78 different solutions'. Bij een andere uitgave in 1932 stond er al: 'over 80 known solutions'.
In Nederland werd deze puzzel genoemd door Ir. J.R.G. de Veer in zijn puzzelrubriek 'Hersenkronkelingen' van de Nieuwe Rotterdamsche Courant. Als hersenkronkeling 176 (7 mei 1932) riep puzzelaar W. van der E. uit Utrecht de hulp in van de lezers. Hij verzamelde oplossingen van deze puzzel en had er al 24! Gezamenlijk kwamen de lezers toen tot 52 verschillende oplossingen.
Tot begin 1993 moeten we wachten op het juiste aantal. Dan gaat *Jacques Haubrich* (37), Eindhoven zich in dit probleem verdiepen. Zijn computer vindt de 84 verschillende manieren om een schaakbord te maken van de 14 stukjes. Zodoende is bovengenoemd compendium ontstaan. Mijn oproep voor Nederlandse varianten heeft (helaas) nog niets opgeleverd.
In augustus 1993 verscheen ook 'Hoffmann's Puzzles Old and New by Professor Hoffmann and edited by L.E. Hordern'. Een prachtig uitgevoerd boek met de foto's van de oorspronkelijke puzzels, onder andere van 'The Chequers Puzzle'.

Met 49 punten is deze maand (na loting) de winnaar van de boekenbon van *f* 25,-:
Rini van Bruchem, Meeuwenlaan 19, 3411 BC Lopik.
Hartelijk gefeliciteerd.

▶ Opgave 650

Gegeven is een rechthoekige driehoek met hoeken 30°, 60° en 90°. Nu zijn de hoeken gehele getallen, maar de lengte van minstens één zijde is niet een geheel getal. De verhouding van de zijden is toch immers $1 : \sqrt{3} : 2$?
Heeft u het probleem wel eens omgekeerd?
Ga uit van een rechthoekige driehoek, waarbij de zijden gehele getallen (kleiner dan 1000) zijn. Deze drie getallen voldoen aan de Stelling van Pythagoras! De twee scherpe hoeken kunnen dan niet 30° en 60° zijn, maar hoe dicht kunt ú ze benaderen?

Oplossingen binnen een maand ingestuurd leveren maximaal 5 ladderpunten op. Wie komt er, met zijden kleiner dan 1000, het dichtst bij 30° en 60°? Ik ben benieuwd.

Heel veel kerstvakantie-puzzelplezier en een goed puzzeljaar 1994 toegewenst.



Van de bestuurstafel

Marian Kollenveld

Aansluiting 1

Veel briefschrijvers toonden zich bezorgd over de aansluiting van de basisvorming op de bovenbouw van havo en vwo. De kerndoelen lijken hiervoor niet bepaald toereikend. Dat hoeft ook niet, want tussen de basisvorming en die bovenbouw zit nog een derde (en ook een vierde) klas waarin veel kan gebeuren om de leerlingen hierop voor te bereiden, voortbouwend op wat in de basisvorming is aangeboden. Natuurlijk is het van belang dat dit goed ingevuld wordt, liefst zonder 'de bocht terug te nemen' en in een inhaalmanoevre alsnog 'alles' even door te nemen. Hier ligt een niet geringe uitdaging o.a. voor de auteurs van de boeken voor die klassenlagen.

Aansluiting 2

De bovenkant van de bovenbouw baart ook zorg: de aansluiting tussen het havo en het hbo. Op verschillende plaatsen in het land zijn inmiddels initiatieven ontwikkeld, waarbij men wederzijds kennis neemt van elkaars onderwijs. Dat leidt tot heel verrassende conclusies. Binnen het hbo blijkt men niet altijd volledig op de hoogte van de inhoud van het nieuwe havo-wiskundeprogramma en ook de wijze van presentatie en de onderwijsvormen lopen in beide sectoren nogal uiteen.

Na het examen: wie studeert er nog exact?

In deze van technologie doordrenkte tijd loopt de belangstelling voor een studie in de bèta-vakken terug. De gevolgen hiervan laten zich gemakkelijk raden. De BETA-federatie, waarbij 15 verenigingen uit deze sector zijn aangesloten, waaronder de NVvW, werkt aan een breed actieplan om hier iets aan te doen. Zo wil men onder meer het imago van deze vakken bij de jeugd wat boeiender maken en de zichtbaarheid van de beroepsbeoefenaren vergroten. Ook wil men de aantrekkelijkheid en de kwaliteit van deze vakken in het onderwijs (en onderzoek) op alle niveaus, - dus ook in het beroepsonderwijs - vergroten, voor leerling èn docent. Er zijn vele projecten bedacht, waarover u ongetwijfeld meer zult horen als ze tot uitvoering komen.

Regionale bijeenkomsten

Onder het motto "de Vereniging komt naar U toe" wordt dit jaar in februari wederom een aantal bijeenkomsten in het land georganiseerd. We hopen daarbij velen van u te mogen ontmoeten. Let op de Euclideskalender voor de data! Het aantal regio's is weer wat groter dan vorig jaar. We streven naar een - eindige - overdekking, waarbij een ietsje compacter Nederland wel prettig zou zijn. U kunt dan tussen 16 en 20 uur in een aantal werkgroepen onder meer kennis nemen van ervaringen met toetsen van de basisvorming, zien hoe een interactieve CD Ruimtemeetkunde werkt, praten over een nieuw wiskunde B-programma op het vwo, of luisteren naar (en zelf ook doen) wat iemand in haar beroep voor wiskunde gebruikt. Ook zal er een speciale werkgroep zijn voor het (i)vbo. Een uitgebreide aankondiging met daarop het volledige programma en een inschrijfformulier zal evenals vorig jaar naar alle scholen worden gestuurd. We vragen u dringend voor uw aanmelding **uitsluitend** gebruik te maken van dat formulier.

Komt allen!

40 jaar geleden

Vraagstukken

3555. Van de rij $\{a_n\}$ is gegeven $a_1 \neq 2$ en voor $n \geq 1$:

$$a_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2n - a_n}.$$

Bereken: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 a_2 \ldots a_{n+1}}{n!}$.

3556. Een orthogonale hyperbool h wordt door een cirkel gesneden in vier verschillende punten A, B, C en D. Bewijs, dat het hoogtepunt van de driehoek gevormd door drie van deze vier punten op h ligt, diametraal tegenover het vierde punt.

3557. Gegeven is de derde-graads kromme k die op een rechthoekig assenstelsel tot vergelijking heeft $x(x^2 + y^2) = ay^2, (a > 0)$.
Stel de vergelijking op van de cirkel, die gaat door de raakpunten van de drie raaklijnen, die men uit een gegeven punt (α, β) aan k kan trekken.

3558. a. Men vraagt te bewijzen:

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}},$$

indien het aantal worteltekens in het linkerlid n bedraagt.
b. Bewijs ook de volgende uitbreiding van deze formule:

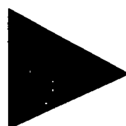
$$\varepsilon_1\sqrt{2 + \varepsilon_2\sqrt{2 + \ldots + \varepsilon_n\sqrt{2}}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{k+1}}{2^k}\right),$$

waarin de getallen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ alleen de waarden 1 en -1 kunnen aannemen.
(Naar aanleiding van Wiskunde L.O. 1931, Planimetrie, nr. 3)

3559. Van een ellips ε zijn twee toegevoegde middellijnen in ligging en grootte gegeven. Een punt M, dat niet op een van deze middellijnen ligt, is het middelpunt van een cirkel γ, die affien verwant is met ε.
Construeer de as van de affiniteit, die er tussen ε en γ bestaat.

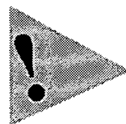
3560. Voor welke waarden van het priemgetal p heeft de congruentie
$x^2 - x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$
oplossingen? Los de congruentie op, als $p = 19$.

Vraagstukken uit Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 41 (1953-1954).



Adressen van auteurs

G. Bakker, F.J. Mahieu, Cito, Postbus 1034, 6801 MG Arnhem
H. Boertien, Cito, Postbus 1034, 6801 MG Arnhem
J.J. Breeman, De Genestetlaan 94, 2741 AG Waddinxveen
M.C. van Hoorn, Noordersingel 12, 9901 BP Appingedam
M.P. Kollenveld, Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
E. de Moor, Vondelkerkstraat 32, 1054 KZ Amsterdam
J. ter Pelle, SLO, Postbus 2041, 7500 CA Enschede
R. Rousseau, KIHWV, Zeedijk 101, 8400 Oostende, België
A. van der Wal, Ordermolenweg 23, 7312 SC Apeldoorn



Kalender

15 december 1993: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.
8 januari 1994: Amersfoort, Wintersymposium, zie blz.120.
19 januari 1994: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.
16 februari 1994: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.

Inhoud